

THÈSES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE
(MATHÉMATIQUES)

par

JOSHUA ALLENSWORTH LESLIE

1^{ère} THÈSE - "SUR L'EXISTENCE DES GROUPES SIMPLICIAUX MINIMAUX

2^{ème} THÈSE - PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Soutenues le *juin 1961 devant la Commission d'Examen*

C. EHRESMANN

H. CARTAN

R. GODEMENT

} Examinateurs

THÈSES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE
(MATHÉMATIQUES)

par

JOSHUA ALLENSWORTH LESLIE

1^{ère} THESE - "SUR L'EXISTENCE DES GROUPES SIMPLICIAUX MINIMAUX

2^{ème} THESE - PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTE

Soutenues le juin 1961 devant la Commission d'Examen

C. EHRESMANN

H. CARTAN

R. GODEMENT

} Examineurs



CHAPITRE I

Remarques sur l'Algèbre Homologique

1) Rappels sur les catégories et les foncteurs

Pour les détails sur les notions exposées dans cette section voir (10).

Nous allons appeler **catégorie** une classe $\mathfrak{R}$ non-vide d'objets, avec la donnée, pour tout couple $(A, B) \in \mathfrak{R}$ d'un ensemble $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(A, B)$ appelé l'ensemble des **morphismes** de A dans B et la donnée, pour trois objets $A, B, C \in \mathfrak{R}$ d'une composition de morphisme $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(A, C)$ de façon que :

(A) Pour trois objets $A, B, C \in \mathfrak{R}$ et deux morphismes $\alpha \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(A, B)$ et $\beta \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(B, C)$ la composition $\beta \alpha$ de $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(B, C)$ dans $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(A, C)$ soit associative.

(B) Il existe dans $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(A, A)$ un élément I_A qui est une unité à droite et à gauche pour la composition des morphismes.

(C) $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(A, B)$ et $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(A', B')$ sont disjoints, sauf si $A = A', B = B'$.

Définition 1-1-1 : Un morphisme $\varphi \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(C, C')$

est un **isomorphisme** s'il existe un morphisme $\varphi' \in$

$\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(C', C)$, tel que $\varphi \circ \varphi' = I_{C'}$ et $\varphi' \circ \varphi = I_C$. Dans ce cas nous dirons que les objets C et C' sont **isomorphes**.

Définition 1-1-2 : Si $\mathfrak{R}$ est une catégorie, la catégorie **duale** $\mathfrak{R}^d$ est la catégorie ayant les mêmes objets que et où l'ensemble $\text{Hom}_{\mathfrak{R}^d}(C, C')$ est identique à $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(C', C)$ le composé de α et β dans $\mathfrak{R}^d$ étant défini comme le composé de β et α dans C .

Définition 1-1-3 : Le **produit cartésien** $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ de deux catégories est la catégorie dont les objets sont les paires (C_1, C_2) , $C_1 \in \mathfrak{R}_1, C_2 \in \mathfrak{R}_2$; les morphismes sont les paires (γ_1, γ_2) , $\gamma_1 \in \mathfrak{R}_1, \gamma_2 \in \mathfrak{R}_2$; la composition de deux morphismes est donnée par $(\gamma_1, \gamma_2) (\beta_1, \beta_2) = (\gamma_1 \beta_1, \gamma_2 \beta_2)$.

Soient C_1, C_2, C_3 trois catégories et $F : \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \rightarrow \mathfrak{R}_3$ une fonction qui applique une paire de morphismes $\alpha \in \text{Hom}_{C_1}(A_1, A_2), \beta \in \text{Hom}_{C_2}(B_1, B_2)$ dans un morphisme $\gamma \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}_3} F(A_2, B_1) F(A_1, B_2)$ de manière que :

(A) $F(I_A, I_B) = I_{F(A, B)}$

(B) $F(\alpha_2 \circ \alpha_1, \beta_1 \circ \beta_2) = F(\alpha_2, \beta_1) F(\alpha_1, \beta_2)$

F est appelé un **foncteur covariant** en $\mathfrak{R}_2$ et **contravariant** en $\mathfrak{R}_1$, à

valeurs dans $\mathcal{R}_3$. Si $\mathcal{R}_1$ est réduit à un seul objet $\mathcal{R}$ et un seul morphisme I_C , nous trouvons la définition d'un **foncteur covariant**. De même, si $\mathcal{R}_2$ est réduit à un seul objet $\mathcal{R}$ et un seul morphisme I_C , nous trouvons la définition d'un **foncteur contravariant** et nous écrivons $F: \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_3$ (respectivement $F: C_1 \rightarrow C_3$).

Nous avons évidemment deux foncteurs covariants $P_-: \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1$ et $P_+ = \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_2$ donnés par les projections.

Soient $F_1: \mathcal{R} \rightarrow C'$ et $F_2: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ deux foncteurs covariants. Une transformation de foncteurs de F_1 dans F_2 est une fonction φ qui associe à tout $A \in \mathcal{R}$ un morphisme $\varphi(A): F_1(A) \rightarrow F_2(A)$, de façon que pour tout morphisme $\alpha: A_1 \rightarrow A_2$ le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} F_1(A_1) & \rightarrow & F_1(\alpha) & \rightarrow & F_1(A_2) \\ \varphi(A_1) \downarrow & & & & \downarrow \varphi(A_2) \\ F_2(A_2) & \rightarrow & F_2(\alpha) & \rightarrow & F_1(A_1) \end{array}$$

soit commutatif. Si F_1 et F_2 sont deux foncteurs contravariants, on change le sens des flèches horizontales et on trouve la définition d'une transformation de foncteurs dans ce cas.

Une catégorie $\mathcal{R}$, où pour toute paire $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in C$, $\text{Hom}_C(C_1, C_2)$ est un groupe abélien, est dite **additive** si

(1) pour tout triple $C_1, C_2, C_3 \in C$ la composition $\text{Hom}_C(C_1, C_2) \times \text{Hom}_C(C_2, C_3) \rightarrow \text{Hom}_C(C_1, C_3)$ est bilinéaire.

(2) il existe un objet $O \in C$ tel que $I_O = O \in \text{Hom}(O, O)$. O est appelé un **élément neutre**.

(3) Si $C_1, C_2 \in C$, il existe un objet $C_1 \oplus C_2 \in C$ et des morphismes $\gamma_i = C_i \rightarrow C_1 \oplus C_2$ tels que

$$\text{Hom}_C(\gamma, I_C) \oplus \text{Hom}_C(\gamma_2, I_C): \text{Hom}_C(C_1 \oplus C_2, C) \rightarrow \text{Hom}_C(C_1, C) \oplus \text{Hom}_C(C_2, C)$$

soit un isomorphisme. $C_1 \oplus C_2$ est appelé la **somme directe** de C_1 et C_2 .

Soient C et C' deux catégories additives; un foncteur $F: C \rightarrow C'$ est dit **additif** si $F(\gamma_1 + \gamma_2) = F(\gamma_1) + F(\gamma_2)$ chaque fois que $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Hom}_C(C_1, C_2)$.

Remarque I-I-I: On déduit de (3):

$$(3') \text{ Il existe deux morphismes } \eta^{C_1 \oplus C_2} = C_1 \oplus C_2 \rightarrow C_i, i = 1, 2, \text{ tels que}$$

$$\eta^{C_1 \oplus C_2} \quad \eta^{C_2 \oplus C_1} : \text{Hom}_C(C, C_1 \oplus C_2) \rightarrow$$

$$\text{Hom}_C(C, C_1) \times \text{Hom}_C(C, C_2)$$

soit un isomorphisme pour tout $C \in C$. En effet, soient $\eta_i \in \text{Hom}_C(C_1 \oplus C_2, C_i)$, $i = 1, 2$, les morphismes dont les composantes sont I_{C_i} et O . On vérifie sans difficulté que les $\eta_i^{C_1 \oplus C_2}$ ci-définis satisfont à (3').

On a les isomorphismes canoniques

$$\gamma_{C_2 \oplus C_1} \circ \eta_2^{C_1 \oplus C_2} + \gamma_1^{C_1 \oplus C_2} \circ \eta^{C_1 \oplus C_2} : C_1 \oplus C_2 \rightarrow C_2 \oplus C_1$$

et

$$\begin{aligned} & \gamma_{(1,2)}^{(C_1 \oplus C_2) \oplus C_3} \circ \gamma_1^{C_1 \oplus C_2} \circ \eta_1^{C_1 \oplus (C_2 \oplus C_3)} + \gamma_{a,2}^{(C_1 \oplus C_2) \oplus C_3} \circ \gamma^{(C_2 \oplus C_3)} \circ \eta_2^{(C_2 \oplus C_3)} \\ & \eta_{(2,3)}^{C_1 \oplus (C_2 \oplus C_3)} + \gamma_3^{(C_1 \oplus C_2) \oplus C_3} \circ \eta_3^{(C_2 \oplus C_3)} \circ \eta^{(C_2 \oplus C_3)} : C_1 \oplus (C_2 \oplus C_3) \\ & \rightarrow (C_1 \oplus C_3) \oplus C_2 \end{aligned}$$

Soient $C_1 = C_2 = C$ et $\Delta_c : C \rightarrow C \oplus C$ la somme des deux injections canoniques et $\nabla_c : C \oplus C \rightarrow C$ la somme des deux projections canoniques. Si $\alpha, \beta : C \rightarrow C'$ et si l'on écrit $\alpha \oplus \beta = \gamma_1 \alpha \eta_1 + \gamma_2 \beta \eta_2$, il est facile de voir que $\nabla_{c'} \circ \alpha \oplus \beta \circ \nabla_c = \alpha + \beta$.

2) Les Classes de Baer-Yoneda (38)

Définition 1-2-1 : Soient $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ et $F' : \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}_2 \times \mathcal{R}_3$ deux foncteurs. La catégorie $\mathcal{R}' \times_{\mathcal{R}_2} \mathcal{R}$ est la sous-catégorie de $\mathcal{R}' \times \mathcal{R}$ formée des couples d'objets (C', C) (respectivement morphismes (γ', γ)) tels que $P_+ \circ F(C) = P_- \circ F'(C')$ (respectivement $P_+ \circ F(\gamma) = P_- \circ F'(\gamma')$).

Si $(C', C) \in \mathcal{R}' \times_{\mathcal{R}_2} \mathcal{R}$, on pose $F * F'(C', C) = (P_- \circ F(C), P_+ \circ F'(C'))$. De cette façon on définit un foncteur $F * F' : \mathcal{R}' \times_{\mathcal{R}_2} \mathcal{R}$ appelé le **produit intérieur de F et F'**.

On déduit immédiatement des définitions la **Proposition 1-2-1**: Le produit intérieur est associatif.

(i.e., si $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$, $F' : \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}_2 \times \mathcal{R}_3$, et $F'' : \mathcal{R}'' \rightarrow \mathcal{R}_3 \times \mathcal{R}_4$ sont des fonctions covariants, alors

$$F * (F' * F'') = (F * F') * F'' : \mathcal{R}'' \times_{\mathcal{R}_3} (\mathcal{R}' \times_{\mathcal{R}_2} \mathcal{R}) = (\mathcal{R}'' \times_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}') \times_{\mathcal{R}_2} \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_4.$$

P_- et P_+ étant additifs, on a la

Proposition 1-2-2 : Si $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ et $F' : \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}_2 \times \mathcal{R}_3$ sont additifs, alors $F * F' : \mathcal{R}' \times_{\mathcal{R}_2} \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_3$ est additifs.

Définition 1-2-2 : Soit $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ un foncteur covariant. Un **coin** par rapport à F consiste en un morphisme $\gamma : C_1 \rightarrow C_2 \in \mathcal{R}$ et un objet $C \in \mathcal{R}$ tel que $F(C) = C_1$.

Nous employons la notation $(C_1 \rightarrow C_2, C)_F$ pour désigner un coin.

Définition 1-2-3 : Un **relèvement** (χ, ξ) d'un coin $(C_1 \xrightarrow{\gamma} C_2, C)$ est un objet $\chi \in \mathcal{R}$ et un morphisme $\xi : C \rightarrow \chi \in \mathcal{R}$ tel que $F(\xi) = \gamma$.

Un relèvement (X, ξ) d'un coin $(C_1 \xrightarrow{\gamma} C_2, C)_F$ est dit **universel** si, pour tout morphisme $\gamma' : C_2 \rightarrow C_3$ et pour tout relèvement (X', ξ') du coin $(C_1 \xrightarrow{\gamma \circ \gamma'} C_3, C)_F$ il existe un et un seul morphisme $\xi' : X \rightarrow X'$ tel que $\xi' \circ \xi = \xi''$ et $F(\xi') = \gamma'$.

Par dualité nous définissons les cocoins $(C_1 \xleftarrow{\gamma} C_2, C)_F$, relèvements, etc. Nous déduisons immédiatement des définitions les

Proposition 1-2-3 : Le relèvement universel d'un coin ou d'un cocoin respectivement, s'il existe, est **unique** à un isomorphisme près.

Proposition 1-2-4 : Si (X, ξ) est le relèvement universel du coin $(C_1 \xrightarrow{\gamma} C, C)_F$ (respectivement du cocoin $(C_1 \xleftarrow{\gamma} C_2, C)_F$) et si (X', ξ') est le relèvement universel du coin $(C_2 \xrightarrow{\gamma'} C_3, X)_F$ (respectivement $(C_2 \xleftarrow{\gamma'} C_3, X)_F$), alors $(X', \xi' \circ \xi)$ est le relèvement universel du coin $(C_1 \xrightarrow{\gamma' \circ \gamma} C_3, C)_F$ (respectivement du cocoin $(C_1 \xleftarrow{\gamma' \circ \gamma} C_3, C)_F$), et

Proposition 1-2-5 : Soient $\gamma_1 : C_1 \rightarrow C_2, \gamma_2 : C_2 \rightarrow C \in \mathcal{R}$

et $\xi : X_1 \rightarrow X_2 \in \mathcal{R}$ tel que $F(\xi) = \gamma_2 \circ \gamma_1$. Si (X', ξ') est le relèvement universel du coin $(C_1 \xrightarrow{\gamma_1} [C_2, X_1])_F$ et si (X_2, ξ_2) est le relèvement universel du cocoin $(C \xleftarrow{\gamma_2} [C_2, X_2])_F$, alors il existe un et un seul morphisme $\xi' : X_1 \rightarrow X_2$ tel que $\xi_2 \circ \xi' \circ \xi_1 = \xi$ et $F(\xi') = I_{C_2}$.

On déduit des propositions 3 et 4 la

Proposition 1-2-6 : Le relèvement universel d'un isomorphisme, s'il existe, est un isomorphisme.

Un foncteur $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ covariant est dit **régulier** si les coins (cocoins) de la forme $((A \xrightarrow{IA} A, B \xleftarrow{\beta} B')_X)_F$ (respectivement $((A \xleftarrow{IA} A', B \xrightarrow{IA} B), X)_F$) ont des relèvements universels.

Proposition 1-2-7 : Si $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ et $F : \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}_2 \times \mathcal{R}_3$ sont des foncteurs covariants réguliers, alors le produit intérieur $F^* \circ F' : \mathcal{R}' \times \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_3$ est un foncteur covariant régulier.

Démonstration : Considérons un coin $((A \xrightarrow{IA} A, B \xleftarrow{\beta} B')_X)_{F \circ F'}$

, F et F' étant réguliers; il existe un relèvement universel (Z, z) du coin $((P_- \circ F' (P_- (\chi)))_{I_{P_-} \circ F' (P_- (\chi))} P_- F' (P_- (X)), B \xleftarrow{\beta} B', P_- (X))_{F'}$, et il existe un relèvement universel (X, I_X) du cocoin $((A \xrightarrow{IA} A, P_+ \circ F \circ P_+ (X))_{I_{P_+} \circ F \circ P_+ (\chi)} P_+ \circ F \circ P_+ (\chi))_F$.

L'égalité $P_+ \circ F \circ P_+ (X) = P_- \circ F' \circ P_- (X)$ montre que $((Z, \chi), (z, I_X))$ est un relèvement du coin $((A \xrightarrow{IA} A, B \xleftarrow{\beta} B'), X)_F *_{F'} \cdot$. Ce relèvement est universel. En effet, soit $\Gamma = (\alpha, \beta') : (A, B') \rightarrow (A', B'')$ un morphisme dans $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_3$ et (Y, η) un relèvement du coin $((A \xrightarrow{IA} A', B \xleftarrow{\beta'} B'')_X)_{F'}$. (Z, z) étant universels, il existe un unique morphisme ξ tel que $\xi \circ z = P_- (\eta)$ et $F'(\xi) = \beta'$. $(\xi, P_+ (\eta))$ est donc l'unique morphisme tel que $(\xi, P_+ (\eta)) \circ (z, I_X) = \eta$ et $F^* \circ F'(\xi, P_+ (\eta)) = (\alpha, \beta')$.

Nous laissons au lecteur le soin de la démonstration de l'existence des relèvements universels pour les cocoins de la forme

$$(A \propto A', B \overset{I_B}{\rightarrow} B, X) \underset{F}{*} F'.$$

Soit maintenant $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ un foncteur covariant quelconque. Pour deux objets $X_1, X_2 \in F^{-1}(C_1, C_2), (C_1, C_2) \in \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$, nous écrivons $X_1 \sim X_2$, s'il existe un morphisme $\xi : X_1 \rightarrow X_2 \in \mathcal{R}$ tel que $F(\xi) = (I_{C_1}, I_{C_2})$; ceci engendre une relation d'équivalence, $\sim$, dans $\mathcal{R}$.

Posons $F(C_1, C_2) = F^{-1}(C_1, C_2) / \sim$. La classe d'équivalence d'un objet $X \in F^{-1}(C_1, C_2)$ sera désignée par X . Soit χ la catégorie dont les objets sont les $F(C_1, C_2), (C_1, C_2) \in \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ et les morphismes sont des applications élémentaires déduites des morphismes de $\mathcal{R}$ par la relation d'équivalence.

Lemme 1-2-1 : Lorsque F est régulier, $G(C_1, C_2) = F(C_1, C_2)$ définit un foncteur $G : \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \rightarrow \chi$ contravariant en $\mathcal{R}_1$, covariant en $\mathcal{R}_2$, et un seul, tel que l'existence d'un morphisme $\xi : X \rightarrow X'$ avec $F(\xi) = (\gamma_1, \gamma_2)$, $F(X) = (C_1, C_2)$, $F(X') = (C'_1, C'_2)$ entraîne $G(\gamma_1, \gamma_2)(X') = G(I_{C_1}, I_{C_2})(X)$.

Démonstration : Pour un objet $X \in F^{-1}(C_1, C_2)$ et un morphisme $\gamma_2 : C_2 \rightarrow C'_2$ ($X_1 : C_1 \rightarrow C'_1$) nous prenons le relèvement universel X' du coin $((C'_1 \xrightarrow{I_{C'_1}} C_1, C_2 \xrightarrow{\gamma_2} C'_2), X) \underset{F}{*} (X' \text{ du cocoin } ((C_1 \xrightarrow{I_{C_1}} C'_1, C_2 \xrightarrow{I_{C_2}} C'_2), X) \underset{F}{*})$ et posons $G(I_C, \gamma_2)(X) = X'$ ($G(\gamma_1, I_{C_2})(X) = X'$). Si $\eta = (\alpha, \beta) : C'_1 \times C_2 \rightarrow C_1 \times C'_2$, posons $G(\eta) = G(I_C, \beta) \cdot G(\alpha, I_{C_2})$. Les propositions 1-2-3 et 1-2-4 nous donnent que G est un foncteur bien défini. La proposition 1-2-5 implique que $G(\gamma_1, I_{C_2})(X') = G(I_{C_1}, \gamma_2)(X)$. L'unicité est évidente à partir des définitions.

Maintenant soient $\mathcal{R}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ trois catégories additives, $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ un foncteur additif, régulier et $F : \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \rightarrow \chi$ le foncteur défini par le lemme précédent. La somme directe par passage aux classes d'équivalence donne une application :

$$\oplus : F(C_2, C_2) \times F(K_1, K_2) \rightarrow F(C_1 \oplus K_1, C_2 \oplus K_2) \\ ((X_1) \oplus (X_2)) = (X_1 \oplus X_2)$$

Supposons $C_1 = K_1$ et $C_2 = K_2$, désignons par Δ_{C_1} le morphisme diagonal $C_1 \rightarrow C_1 \oplus C_1$ et par ∇_{C_2} le morphisme diagonal $C_2 \oplus C_2 \rightarrow C_2$. Yoneda (38) a défini un produit dans $F(C_1, C_2)$ par

$$(X_1) + (X_2) = F(\Delta_{C_1}, \nabla_{C_2})((X_1) \oplus (X_2)).$$

Ce produit ne dépend pas de la représentation de la somme directe.

Théorème 1-2-1 : Si $F(C_1, C_2)$ est déduit du produit ci-dessus défini, pour tout $(C_1, C_2) \in \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$, $F : \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \rightarrow \chi$ est un foncteur additif contravariant en $\mathcal{R}_1$, covariant en $\mathcal{R}_2$ prenant ses valeurs dans la sous-catégorie χ_M où M est la catégorie des groupes abéliens.

Démonstration : Du Lemme 1-2-2 nous déduisons que $F : \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \rightarrow \chi$ est un foncteur contravariant en $\mathfrak{R}_1$, covariant en $\mathfrak{R}_2$; $F(C_1, C_2)$ est **commutatif**. En effet, si $S : X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_2 \oplus X_1$; $X_1, X_2 \in F(C_1, C_2)$, est l'isomorphisme canonique, $P_+ \circ F(S) : C_1 \oplus K_1 \rightarrow K_1 \oplus C_1$ et $P_- \circ F(S) : C_2 \oplus K_2 \rightarrow K_2 \oplus C_2$ (où $K_1 = C_1, K_2 = C_2$), sont des isomorphismes canoniques. Il est évident que $\nabla_{C_2} \circ P_+ \circ F(S) = \nabla_{C_2}$ de même, $\Delta_{C_1} \circ P_- \circ F(S) = \Delta_{C_1}$. Ces deux égalités montrent que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 F(K_1 \oplus C_1, K_2 \oplus C_2) & \xrightarrow{F(I_{K_1} \oplus c_1, c_2)} & F(L_1 \oplus C_2, c_2) & \xrightarrow{F(\Delta_{C_1}, I_{C_2})} & F(C_1, C_2) \\
 \downarrow F(I_{C_1} \oplus K_1, \nabla_{C_2}) & & \downarrow F(I_{C_1} \oplus K_1, \nabla_{C_2}) & & \downarrow F(I_{C_1} \oplus K_1, \nabla_{C_2}) \\
 F(C_1 \oplus K_1, C_2 \oplus K_2) & \xrightarrow{F(I_{C_1} \oplus K_1, \nabla_{C_2})} & F(K_1 \oplus C_2, C_2) & \xrightarrow{F(\Delta_{C_2}, I_{C_2})} & F(C_1, C_2)
 \end{array}$$

est commutatif. Etant donné que $F(P_- \circ F(S), P_+ \circ F(S)) : (X_1 \oplus X_2) \rightarrow X_2 \oplus X_1$, la commutativité de $\oplus$ est montrée.

Par un raisonnement analogue on montre l'associativité de $\oplus$.

Si $\gamma_1 : C_1 \rightarrow C'_1$ de l'égalité $\Delta_{C_1} \gamma_1 \beta_1 (\gamma_1 \oplus \gamma_2) \Delta_{C_1}$ Nous déduisons :

$$(a) F(\gamma_1, I_{C_2})([X_1]) + [X_2] = F(\gamma_1, I_{C_2})([X_1]) + F(\gamma_1, I_{C_2})([X_2]).$$

$$\begin{aligned}
 & \text{En effet, } F(\gamma_1, I_{C_2})([X_1] + [X_2]) = \\
 & F(\gamma_1, I_{C_2}) F(\Delta_{C_1}, \nabla_{C_2})([X_1] \oplus [X_2]) = F(\Delta_{C_1} \circ \gamma_1, \nabla_{C_2})([X_1] \oplus [X_2]) \\
 & = F([\gamma_1 \oplus \gamma_1] \circ \Delta_{C_1}, \nabla_{C_2})([X_1] \oplus [X_2]) = \\
 & F(\Delta_{C_1}, \nabla_{C_2})(F(\gamma_1, I_{C_1})([X_1]) \oplus F(\gamma_1, I_{C_2})([X_2])) \\
 & = F(\gamma_1, I_{C_2})([X_1]) + F(\gamma_1, I_{C_2})([X_2]).
 \end{aligned}$$

Et par dualité, si $\gamma_2 : C_2 \rightarrow C'_2$

$$(b) F(I_{C_1}, \gamma_2)([X_1] + [X_2]) = F(I_{C_1}, \gamma_2)([X_1]) + F(I_{C_2}, \gamma_2)([X_2]).$$

De même, nous avons :

$$(c) \text{ Si } \alpha_1, \alpha_2 : C_1 \rightarrow C'_1 \quad F(\alpha_1 + \alpha_2, I_{C_2})([X]) = F(\alpha_1, I_{C_2})([X]) + F(\alpha_2, I_{C_2})([X]).$$

En effet, en appliquant le Lemme 1-2-1 à $\nabla_X : X \oplus X \rightarrow X$, nous trouvons $F(I_{C_1}, \nabla_{C_2})([X] \oplus [X]) = F(\Delta_{C_1}, I_{C_2})([X])$.

Alors

$$\begin{aligned}
 & F(\alpha_1 + \alpha_2, I_{C_2})([X]) = F(c_1 \circ (\alpha_1 \oplus \alpha_2) \circ \Delta_{C_1}, I_{C_2})([X]) = \\
 & F(\alpha_1 \oplus \alpha_2, \Delta_{C_2}, I_{C_2}) F(I_{C_1}, c_2)([X] \oplus [X]) = \\
 & F(\Delta_{C_1}, \nabla_{C_2}) F(\alpha_1 \oplus \alpha_2, I_{C_2})([X] \oplus [X]) = \\
 & F(\alpha_1, I_{C_2})([X]) + F(\alpha_2, I_{C_2})([X]).
 \end{aligned}$$

La dualité nous donne

(d) Si $\beta_1, \beta : C_2 \rightarrow C_2, F(I_{C_1}, \beta_1 + \beta_2)$
 $([X]) = F(I_{C_1}, \beta_1)([X]) + F(I_{C_1}, \beta_2)([X]).$

Maintenant, soient $O_{C_1} : O \rightarrow O_1, O_{C_1}^{c1} : C_1 \rightarrow O$ les morphisme triviaux et $O_{C_1}^{c1} = O_{C_1} \circ O_{C_1}^{c1} : C_1 \rightarrow C_1$. En appliquant le Lemme 1-2-1 à $O_X : O \rightarrow X$, nous trouvons $F(O_{C_1}, I_{C_2})(X) = F(I_{C_1}, O_{C_2})(O)$ et $F(O_{C_1}^{c1}, I_{C_2})(X) = F(O_{C_1}^{c1}, O_{C_2})(O)$. Il est maintenant facile de démontrer que $F(C_1, C_2)$ est un groupe abélien ayant $F(O_{C_1}^{c1}, O_{C_2})(O)$ comme identité et $F(-I_{C_1}, I_{C_2})(X)$ comme élément inverse à (X) . Les égalités (a) et (b) montrent qu'effectivement F prend ses valeurs dans $X \rightarrow M$. De même, (c) et (d) montrent que $F : \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \rightarrow M$ est un foncteur additif.

3) Les Ext^n

Soit $\mathfrak{R}$ une catégorie additive.

Rappelons qu'une suite

$O \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow O$ dans $\mathfrak{R}$ est dite **exacte** si les suites (i) $O \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(B, C_1) \xrightarrow{\mathfrak{R}} \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(B, C_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(B, C_3)$ et (ii) $O \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(C_3, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}(C_1, B)$ sont exactes pour tout $B \in \mathfrak{R}$.

Définition 1-3-1 : Une suite $X \xrightarrow{\varphi_0} X_1 \xrightarrow{\varphi_1} \dots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} X_n \xrightarrow{\varphi_n} X_{n+1}$ est **exacte** s'il existe des suites exactes

$$O \rightarrow B_j \xrightarrow{\beta_j} X_j \xrightarrow{\xi_j} B_{j+1} \rightarrow O$$

telles que $\varphi_j = \beta_{j+1} \circ \xi_j$

Un morphisme $\gamma : C \rightarrow C'$ est dit **monomorphisme propre** s'il se plonge dans une suite exacte.

$$O \rightarrow C \xrightarrow{\gamma} C' \xrightarrow{\gamma'} C'' \rightarrow C;$$

alors γ est dit un **épimorphisme propre**; $\gamma : C \rightarrow C'$ est appelé un **noyau** de γ' , et γ' est appelé un **conoyau** de γ . Un morphisme $\beta : B \rightarrow B' \in \mathfrak{R}$ est dit **propre** s'il existe un épimorphisme propre $\gamma : B \rightarrow C$ et un monomorphisme propre $\gamma' : C \rightarrow B'$ tels que $\beta = \gamma' \circ \gamma$.

Par la suite nous dirons qu'une classe K de morphismes propres est **admissible** si elle satisfait aux hypothèses suivantes :

(A) Tous les isomorphismes de $\mathfrak{R}$ sont dans K .

(B) Pour que $\gamma : A \rightarrow B$ soit dans K , il faut et il suffit qu'il existe un K -épimorphisme $A \rightarrow X$, et un K -monomorphisme $X \rightarrow B$ tels que $\beta \circ \alpha = \gamma$.

(C) Le noyau d'un épimorphisme dans K est dans K .

(C') Le conoyau d'un monomorphisme dans K est dans K .

De ces trois hypothèses sur K nous déduisons immédiatement que

$O_C : C \rightarrow O$ et $O_C : O \rightarrow C$ sont dans K . En effet, le noyau de $I_C : C \rightarrow C$ n'est autre que $O_C : O \rightarrow C$; son conoyau n'est autre que $O_C^c : C \rightarrow O$.

Définition 1-2-3 : Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ des catégories additives, et K et K' des classes de morphismes propres de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement. Un foncteur $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ est propre si $F(\gamma) \in K'$ pour tout $\gamma \in K$.

Supposons une fois pour toutes que K soit une classe admissible de morphismes propres, ${}^{\epsilon n} \mathcal{R}_k$, est défini être la catégorie dont les objets sont les suites exactes $O \rightarrow E_0 \xrightarrow{\varphi_0} E_1 \xrightarrow{\varphi_1} \dots \rightarrow E_n \xrightarrow{\varphi_n} E_{n+1} \rightarrow O$, où $\varphi_i \in K$, et les morphismes $\epsilon : (E) \rightarrow (E')$ sont les suites de morphismes $\epsilon_i : E_i \rightarrow E'_i$ tels que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} O & \rightarrow & E_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & E_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & \dots \rightarrow E_n \xrightarrow{\varphi_n} E_{n+1} \rightarrow O \\ & & \epsilon_0 \downarrow & & \varphi'_0 & & \varphi'_1 & & \epsilon_n \downarrow & & \varphi_n & & \downarrow & & \epsilon_{n+1} \\ O & \rightarrow & E'_0 & \xrightarrow{\varphi'_0} & E'_1 & \xrightarrow{\varphi'_1} & \dots \rightarrow E'_n \xrightarrow{\varphi'_n} E'_{n+1} \rightarrow O \end{array}$$

soit commutatif.

Nous disons qu'un morphisme $\epsilon = (\epsilon_i) : (E) \rightarrow (E')$ est **propre** si tous les ϵ_i sont propres. Soit $E^n : {}^{\epsilon n} \mathcal{R}_k \rightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ le foncteur covariant additif donné par $E^n((E)) = E_{n+1} \times E_0$ et $E^n(\epsilon_{n+1}, \epsilon_0)$.

Pour deux suites exactes de morphismes dans K

$$(E) : O \rightarrow E_0 \xrightarrow{\epsilon_0} E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_p \xrightarrow{\epsilon_p} E_{p+1} \rightarrow O$$

et

$$(F) : O \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varphi_0} F_1 \rightarrow \dots \rightarrow F_q \xrightarrow{\varphi_q} E_0 \rightarrow O,$$

il est évident que la suite composée

$$(F \circ E) : O \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varphi_0} F_1 \rightarrow \dots \rightarrow F_q \xrightarrow{\epsilon_0 \circ \varphi_q} E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_p \xrightarrow{\epsilon_p} E_{p+1} \rightarrow O$$

est aussi exacte et dans K .

Ce ci donne une transformation $O : E^q * E^p \rightarrow E^{p+q}$.

La seule différence entre $E^q * E^p$ et E^{p+q} est dans un cas le terme intérieur est spécifié a des isomorphismes près et dans l'autre, non. Donc, la Proposition 1-2-7 nous montre que si E est régulier, alors E est régulier pour tout n .

Nous disons que K définit une **structure abélienne** sur $\mathcal{R}$ ou que $\mathcal{R}$ est **K-abélien** si

(i) $E' : {}^{\epsilon} \mathcal{R}_k \rightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ est régulier,

(ii) dans le relèvement universel (X, ξ) d'un coin $((E_2 \xrightarrow{I_{E_2}} E_2, E_0 \xrightarrow{\epsilon_0} E_0), (E)_E)$ (d'un cocoin $((E'_2 \xrightarrow{\epsilon_2} E_2, E'_0 \xrightarrow{I_{E'_0}} E'_0), (E')_E)$) où ϵ_0 est un épimorphisme propre (ϵ_2 un monomorphisme propre), ξ est dans K .

Dans le cas où K est la classe de tous les morphismes de $\mathcal{R}$, cette notion de catégorie abélienne est la même que celle de Grothendieck (13).

$$\text{Lemme 1-3-1 : Soit } (C) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{\gamma} & C_1 & \xrightarrow{\psi} & C_2 & \xrightarrow{\varphi} & C_3 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow u_1 & & \downarrow \gamma & & \downarrow u_3 \end{array}$$

$$(C') \quad 0 \rightarrow C'_1 \xrightarrow{\psi} C'_2 \xrightarrow{\varphi} C'_3 \rightarrow 0$$

un diagramme commutatif où les lignes sont exactes, u_1 , et u_3 des isomorphismes et $\varphi \in K$. Alors γ est un isomorphisme et $\psi' \in K$.

Démonstration : Il suffit de vérifier l'existence d'un morphisme $\gamma' : C'_2 \rightarrow C_2$ tel que $\gamma \circ \gamma' = I_{C_2}$, (comme γ est un isomorphisme, ceci entraîne $\gamma' \circ \gamma = I_{C_2}$).

Prenons le relèvement universel du cocoin

$$((C_3 \xleftarrow{u_3^1 \varphi} C'_2, C_1 \xleftarrow{I_{C_2}} C_1), (C))_{E^1} :$$

$$(E) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C'_1 & \xrightarrow{\psi''} & E & \xrightarrow{\varphi''} & C'_2 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow I_{C_1} & & \downarrow \eta & & \downarrow u_3^1 \circ \varphi' \end{array}$$

$$(C) \quad 0 \rightarrow C'_1 \xrightarrow{\psi} C_2 \xrightarrow{\varphi} C_3 \rightarrow 0$$

Puisqu'on a $\varphi' \circ (\gamma \circ \eta \circ \varphi'') = 0$, et que la suite (C) est exacte, il existe un morphisme $\rho : E \rightarrow C'_1$ tel que $\psi' \circ \rho = \gamma \circ \eta \circ \varphi''$. Or on a :

$$\psi' \circ \rho \circ \psi'' = \gamma \circ \eta \circ \psi'' \circ \varphi'' = \gamma \circ \psi'' = \gamma \circ \psi = \psi' \circ u_1,$$

d'où $u_1^1 \circ \rho \circ \psi'' = I_{C_1}$. Donc (E) se fend, et l'on a un morphisme $i : C'_2 \rightarrow E$ tel que $\psi'' i, \rho \varphi''$ soient des morphismes canoniques pour $E = C_1 \oplus C'_2$. Mettons $\gamma' = \eta \circ i$, alors on obtient $\gamma \circ \gamma' = \gamma \circ (\eta \circ i) = (\psi' \circ (\rho + \psi'')) \circ i = I_{C_2}$; que $\psi' \in K$ suit des hypothèses sur une classe admissible de propres. C.Q.F.D.

Corollaire 1 : Par rapport à $E^1 : \epsilon^1 \mathfrak{R}_k \rightarrow \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ tout relèvement d'un coin $((C_1 \xrightarrow{\alpha} C'_1, C_3 \xrightarrow{I_{C_3}} C_3), (C))_{E^1}$ ou d'un cocoin $((C_1 \xleftarrow{I_{C_1}} C_1, C'_2 \xleftarrow{\beta} C_2), (C))_{E^1}$ est universel.

Corollaire 2 : Soient $C_1, C_2 \in \mathfrak{R}$, pour toute représentation $\gamma_i : C_i \rightarrow C_1 \oplus C_2$ d'une somme directe, $\gamma_i \in K$.

Démonstration : Considérons le diagramme commutatif :

$$(C) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_1 & \xrightarrow{\gamma} & C_1 \oplus C_2 & \rightarrow & C_2 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow I_{C_1} & & \downarrow \eta \oplus \gamma_2 & & \downarrow \end{array}$$

$$(C_1) \quad 0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{I_{C_1}} C_1 \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

Il est immédiat que (C) est un relèvement universel du cocoin $(0 \leftarrow C_2, (C_1))_{E^1}$. Donc dans le Lemme 1-3-1 $\gamma \in K$. La même démonstration est valable pour γ_2 .

Proposition 1-3-1 : Le composé de deux épimorphismes $\alpha : A \rightarrow A$ et $\alpha' : A \rightarrow A$ dans K est un épimorphisme dans K .

Démonstration : Soient $\alpha : A \rightarrow A$ et $\varphi : E \rightarrow A$ deux épimorphismes dans K , nous avons par la définition d'une catégorie abélienne, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & O & \rightarrow & O \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
O & \rightarrow & B & \xrightarrow{\varphi'} & E' & \xrightarrow{\varphi'} & A' \rightarrow O \\
& & \downarrow I_B & \varphi & \downarrow \eta & \varphi & \downarrow ch \\
O & \rightarrow & B & \rightarrow & E & \rightarrow & A \rightarrow O \\
& & & & \downarrow \alpha \circ \varphi & \downarrow \alpha & \\
& & & & A & \rightarrow & \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & O & & O
\end{array}$$

où η est un monomorphisme dans K . Ce qui montre que $\alpha \circ \varphi$ est dans K .
C. 2. F. D.

Par dualité nous avons

Proposition 1-3-1 * : Le composé de deux monomorphismes dans K , est un monomorphisme dans K .

Corollaire 1 : Soient $\gamma : C \rightarrow D$ et $\gamma' : C' \rightarrow C'$ deux monomorphismes dans K . Alors $\gamma + \gamma' : C \oplus C' \rightarrow D \oplus D'$ est un monomorphisme dans K .

Démonstration : Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
(C \oplus C') & O & \rightarrow & C & \rightarrow & C \oplus C' & \rightarrow C' \rightarrow O \\
& & & \downarrow I_C & & \downarrow \Gamma = I_C \oplus \gamma' & \downarrow \gamma' \\
(C \oplus D') & O & \rightarrow & C & \rightarrow & C \oplus D' & \rightarrow D' \rightarrow O
\end{array}$$

où $\xi_1 : C \rightarrow C \oplus C'$ et $\xi_2 : C \rightarrow C \oplus D'$ sont des monomorphismes d'une représentation de somme directe. Il est clair que Γ est un monomorphisme dans K et que $O \rightarrow C \rightarrow C \oplus C' \rightarrow C' \rightarrow O$ est un relèvement universel. De la même façon nous trouvons un monomorphisme propre.

$$C \oplus D' \rightarrow D \oplus D'.$$

En les composant nous avons que

$$\gamma \oplus \gamma' : C \oplus C' \rightarrow D \oplus D'$$

est un monomorphisme propre.

Par dualité, nous avons

Corollaire 2 : Soient $\gamma : C \rightarrow D$ et $\gamma' : C' \rightarrow D'$ deux épimorphismes dans K . Alors $\gamma \oplus \gamma' : C \oplus C' \rightarrow D \oplus D'$ est un épimorphisme dans K .

Si K définit une structure abélienne sur $\mathfrak{R}$, nous pouvons maintenant vérifier facilement que $\epsilon^1 \mathfrak{R}_K$ est une catégorie additive (avec somme directe).

Nous écrivons $\text{Ext}^n \mathfrak{R}_K$ le foncteur additif associé à E^n par le théorème 1-2-1. Nous faisons la convention $\text{Ext}^0 \mathfrak{R}_K (C_2, C_0) = \text{Hom } \mathfrak{R} (C_2, C_0)$. Le Lemme 1-3-1 implique immédiatement les

Proposition 1-3-2 : Une suite exacte de morphismes dans K ,

(C) $0 \rightarrow C \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow 0$, donne

$(C) = 0 \in \text{Ext } \mathfrak{H}_k (C_2, C_0)$

si et seulement si (C) est direct,

et

Proposition 1-3-3 : Soit $(C) \quad 0 \rightarrow C'_1 \xrightarrow{\gamma^0} C'_1 \xrightarrow{\gamma^1} \dots \rightarrow C'_n \xrightarrow{\gamma^n} C_{n+1} \rightarrow 0$ une suite exacte dans K. Si $\eta_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C'_{n+1}$ est un morphisme qui se factorise comme suit $\eta_{n+1} = \gamma^0 \circ \eta_{n+1} \rightarrow C'_n$, alors le relèvement universel du cocoin $(C'_0 \xleftarrow{I_{C_0}} C_0, C'_{n+1} \xleftarrow{\eta_{n+1}} C_{n+1}), (C) \in \mathfrak{E}^n$ donne $0 \in \text{Ext}^n \mathfrak{H}_k (C_{n+1}, C'_0)$.

Proposition 1-3-4 : Si dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_1 & \xrightarrow{\psi} & C_2 & \xrightarrow{\varphi} & C_3 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma^1 & & \downarrow \gamma^1 & & \downarrow \gamma^3 \\ 0 & \rightarrow & C'_1 & \xrightarrow{\psi} & C'_2 & \xrightarrow{\varphi} & C'_3 \rightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes, γ^3 est un isomorphisme, γ^2 un K-épimorphisme, alors γ^1 est un K-épimorphisme.

Démonstration : Nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \text{(D)} & & \text{(C)} & & \text{(C)} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & C_1 & \xrightarrow{I_{C_1}} & C_1 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow \gamma^2 \\ 0 & \rightarrow & D & \xrightarrow{\psi''} & C_2 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi' & & \downarrow \gamma^2 \\ 0 & \rightarrow & C'_1 & \xrightarrow{\psi'} & C'_2 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ & & 0 & & C'_3 \rightarrow 0 \end{array}$$

où toutes les colonnes et toutes les lignes sont exactes, (D) étant le relèvement universel du cocoin $(C'_2 \xleftarrow{\psi} C'_1, (C_2)_{E^1})$. Il est facile de voir que nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_1 & \xrightarrow{\delta} & D & \xrightarrow{\delta} & C'_1 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow I_{C_1} & & \downarrow & & \downarrow I_{C'_1} \\ 0 & \rightarrow & C_1 & \xrightarrow{\gamma} & C'_1 & \xrightarrow{\gamma} & C'_1 \rightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et $\delta = K$. Ce qui, par le Lemme 1-3-1, montre que $\gamma^2 \in K$.

Et par dualité la

Proposition 1-3-4 * : Si dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & C_2 & \rightarrow & C_3 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \gamma_3 \\ 0 & \rightarrow & C'_1 & \rightarrow & C'_2 & \rightarrow & C'_3 \rightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes, γ_1 est un isomorphisme, $\gamma_2 \in K$ un monomorphisme, alors γ_3 est un monomorphisme dans K .

Lemme 1-3-2 : Soit $(C) \quad 0 \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow 0$
 $\downarrow \beta \quad \downarrow \eta \quad \downarrow I_{C_2}$
 $(C) \quad 0 \rightarrow C'_0 \xrightarrow{\gamma_0} C'_1 \xrightarrow{\gamma_1} C'_2 \rightarrow 0$

un diagramme commutatif dont (C) et (C') sont des suites exactes de morphismes dans K . Alors la suite

$0 \xrightarrow{\gamma_0} C \xrightarrow{\gamma_0 \circ \beta} C_1 \oplus C'_0 \xrightarrow{\eta + \gamma_0} C'_1 \rightarrow 0$
 est exacte et le morphisme $\gamma_0 \circ \beta \in K$. De plus, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_0 & \xrightarrow{I_{C_0}} & C_1 & \oplus & C'_0 \rightarrow C'_1 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \text{proj. can.} & & \downarrow \gamma_1 \\ 0 & \rightarrow & C_0 & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & C_2 \rightarrow 0 \end{array}$$

Démonstration : Nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ C_0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ C_0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow I_{C_0} + \beta & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & C_0 \oplus C'_0 & \xrightarrow{\gamma_0 \circ I_{C_0}} & C_1 \oplus C'_0 & \xrightarrow{\gamma} & C_2 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \eta + \gamma_0' & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \begin{array}{c} C'_0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \xrightarrow{\gamma_1'} & \begin{array}{c} C'_1 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \xrightarrow{\gamma_2'} & \begin{array}{c} C'_2 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \rightarrow 0 \end{array}$$

ou toutes les lignes et la première colonne sont exactes.
 Ce qui montre que la deuxième suite verticale est exacte.

Nous savons, par la Proposition 1-3-1 * que $\gamma_0 \circ \beta = (\gamma_0 \oplus \beta) \circ \Delta_{C_0}$ est dans K . La commutativité du deuxième diagramme est évidente.

(Autre interprétation de $\text{Ext}^n_{\mathcal{R}K}$) : Soient M la catégorie des groupes abéliens et $F : \mathcal{R} \rightarrow M$ un foncteur additif covariant. Considérons la classe $X(B)$ des couples (X_B, X) où X_B est une suite exacte

$$0 \rightarrow B \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_n \rightarrow A \rightarrow 0$$

où toutes les flèches représentent des morphismes dans K , et $\alpha \in F(A)$. On écrit $(X_B, \alpha) \sim (X'_B, \alpha')$ si on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X_B : 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & E_1 & \rightarrow \dots \rightarrow & E_n \rightarrow A \rightarrow 0 \\ & & \downarrow I_B & & \downarrow & & \downarrow \\ X'_B : 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & E'_1 & \rightarrow \dots \rightarrow & E'_n \rightarrow A \rightarrow 0 \end{array}$$

tel que $F(\alpha) \circ (\alpha) = \alpha'$. Ceci engendre une relation d'équivalence, $\sim$

En associant à B l'ensemble $X(B)/\sim$ et à un morphisme $\beta : B \rightarrow B'$ une application ensembliste $X(\beta) : X(B)/\sim \rightarrow X(B')/\sim$ comme suit : On prend le relèvement universel (X_B, ξ) du coin $(A \xrightarrow{IA} A, B \xrightarrow{\beta} B')$,

$X_B)_{E_n}$ et on fait correspondre la classe $[X_B, \times]$ à la classe $(X_B, \times)$. Ceci définit un foncteur $\gamma : \mathfrak{R} \rightarrow \mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ est la catégorie des ensembles, en posant $\gamma(B) = X(B)/\sim$ et $\gamma(B') = X(B')/\sim$.

Il existe un produit dans $\gamma(B)$ de telle façon que $\gamma : \mathfrak{R} \rightarrow \mathcal{E}$ peut être considéré comme un foncteur prenant ces valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. En effet, étant données deux classes $[X_B, \times]$ et $[X_{B'}, \times']$, on considère la somme directe $(X_B \oplus X_{B'}, \times \oplus \times')$ de leurs représentants suivie de $\gamma(\bigvee_B)$ que l'on écrit $(X_B, \times) + (X_{B'}, \times')$ en passant au quotient. Par une démonstration semblable en tous points à celle du Théorème 1-2-3, on démontre que ceci fait de γ un foncteur covariant prenant ces valeurs dans M . On écrira par la suite

$$\gamma(B) = RK = (F)(B) \text{ et } \gamma(\beta) = R_k^F(\beta).$$

Lemme 1-3-3 : Soit $F(B) = \text{Ext}^m_{\mathfrak{R}_k}(\quad, B)$, où $\text{Ext}^0_{\mathfrak{R}_k}(\gamma, B) = \text{Hom}_{\mathfrak{R}_k}(\gamma, B)$. Il existe une équivalence φ de foncteurs entre $R_k^m F : \mathfrak{R} \rightarrow M$ comme ci-dessus défini, et $\text{Ext}^{n+m}_{\mathfrak{R}_k}(Y, \quad)$.

Démonstration : Supposons $m = 0$. Définissons $\varphi(B) :$

$R_k^0 \text{Hom}(Y, B) \rightarrow \text{Ext}^n_{\mathfrak{R}_k}(X, B)$ comme suit : soit $(X_B, \times)$ tel que $X_B :$

$O \rightarrow B \xrightarrow{\epsilon_0} E_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \dots \xrightarrow{\epsilon_{n-1}} E_n \xrightarrow{\epsilon_n} A$ et $\times \in \text{Hom}(Y, A)$ $\varphi(B)(X_B, \times)$ soit la classe de relèvement universel du cocoin $((A \overset{\times}{\leftarrow} Y, B^1 \overset{\times}{\leftarrow} B), (X_B)_{E_n})$. Il est facile de vérifier que ceci définit une équivalence de foncteur. Dans le cas

$m > 0$, considérons un élément $X \gamma : O \rightarrow A \xrightarrow{\delta_0} D_1 \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_m} D_m \xrightarrow{\delta_m} Y \rightarrow O$ de la classe $\times \in \text{Ext}^m_{\mathfrak{R}_k}(Y, A)$ et soit $\varphi(B)((X_B, \times))$ la classe de

$$O \rightarrow B \xrightarrow{\epsilon_0} E_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \dots \xrightarrow{\epsilon_n} E_n \xrightarrow{\delta_0 \circ \epsilon_n} D_1 \xrightarrow{\delta_1} D_2 \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_m} D_m \xrightarrow{\delta_m} Y \rightarrow O$$

Des définitions on déduit que ceci définit une équivalence.

Définition 1-3-3 : Soient $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ deux catégories additives avec structures abéliennes K et K' respectivement. Un foncteur cohomologique covariant de $\mathfrak{R}_k$ dans $\mathfrak{R}'_k$ est une suite (T^i) , $-\infty < i < +\infty$ de foncteurs additifs covariants propres, plus la donnée pour tout i et toute suite exacte

$(C) \quad O \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow O$ un morphisme $\partial^i : T^i(C'')$ $T^{i+1}(C')$ dans K tel que les axiomes suivants soient satisfaits :

$$(i) \quad T^{i-1}(C'') \xrightarrow{\partial^{i-1}} T^i(C') \xrightarrow{T^i(\gamma')} T^i(C) \xrightarrow{T^i(\gamma'')} T^i(C'') \\ \partial^i \downarrow T^{i+1}(C')$$

soit exacte.

(ii) si on a une deuxième suite exacte $O \rightarrow B' \xrightarrow{\beta'} B \xrightarrow{\beta} B''$

$\rightarrow O$ et un homomorphisme $D = (\delta', \delta, \delta'')$ de la deuxième suite dans la première, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} T^{i-1}(B'') & \xrightarrow{\partial^{i-1}} & T^i(B') & \xrightarrow{T^i(\beta')} & T^i(B) & \xrightarrow{T^i(\beta)} & T^{i+1}(B'') \\ & & \downarrow T^{i-1}(\delta) & & \downarrow T^i(\delta) & & \downarrow T^{i+1}(\delta'') \\ T^{i-1}(C'') & \xrightarrow{\partial^{i-1}} & T^i(C') & \xrightarrow{T^i(\gamma')} & T^i(C) & \xrightarrow{T^i(\gamma'')} & T^{i+1}(C') \end{array}$$

En abaissant les entiers par la règle $T^i = T_{i-1}$, $\partial^i = \partial_{-i}$, nous trouvons la définition d'un foncteur covariant homologique. En dualisant $\mathfrak{R}$, nous trouvons les définitions d'un foncteur contravariant cohomologique et d'un foncteur contravariant homologique. Dans le cas cohomologique ∂^i (resp. ∂_i) sera écrit ∂^i (resp. ∂_i).

Théorème 1-3-1 : Soit $\mathfrak{R}$ une catégorie additive avec K-structure abélienne et $\varphi : R_K^1 \text{Ext}^m_{\mathfrak{R}_K} (B, \quad) \rightarrow \text{Ext}^{m+1}_{\mathfrak{R}_K} (B, \quad)$ l'équivalence de foncteurs du Lemme 1-3-3. Soient $X : O \rightarrow X_0 \xrightarrow{\xi_0} X_1 \xrightarrow{\xi_1} X_2 \rightarrow O$ une suite exacte avec $\xi_1, \xi_2 \in K$ et $X \in \text{Ext}^m_{\mathfrak{R}_K} (B, X_2)$. Si $\partial^m (X) = \varphi(B) ((X, \times))$, la suite des foncteurs $(\text{Ext}^i_{\mathfrak{R}_K} (B, \quad))$ forme un foncteur cohomologique covariant, où K' est la classe de tous les homomorphismes. Pour démontrer ce théorème il nous suffit de démontrer les lemmes suivants :

Lemme 1-3-4 : Soient $F : \mathfrak{R} \rightarrow M$ un foncteur covariant, additif, semi-exact (i.e., si $O \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow O$ est exacte, alors $F(C_0) \rightarrow F(C_1) \rightarrow F(C_2)$ est exacte), et $(C) : O \rightarrow C_0 \xrightarrow{\gamma_0} C_1 \xrightarrow{\gamma_1} C_2 \rightarrow O$ une suite exacte, alors $F(C_1) \xrightarrow{F(\gamma_1)} F(C_2) \xrightarrow{R^1 F} F(C_0)$ est exacte.

Démonstration : S'il existe un $y \in F(C_1)$ tel que $F(\gamma_1)(y) = c$, nous avons $[C, c] = \text{Ext}^1_{\mathfrak{R}_K} (c, C_0) ((C)) = \text{Ext}^1_{\mathfrak{R}_K} (F(\gamma_1)(y), C_0 ((C))) = O$; la dernière égalité résulte de la

Proposition 1-3-3. Si $\varphi((C, c)) = O$, il existe un $y \in F(C_1)$ tel que $F(\gamma_1)(y) = c$. En effet, il suffit de démontrer que l'égalité $F(\gamma_1)(y) = c$ est invariante par la relation $\sim$. Si $(C, c) \sim (C', c')$ et $F(\gamma_1)(y) = c$, nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} (C) & O & \rightarrow & C_0 & \rightarrow & C_1 & \xrightarrow{\gamma_1} C_2 \rightarrow O \\ & & & \downarrow I_{C_0} & & \downarrow \eta & \downarrow \alpha \\ (C) & O & \rightarrow & C_0 & \rightarrow & C'_1 & \xrightarrow{\gamma'_1} C'_2 \rightarrow O \end{array}$$

où $F(\alpha)(c) = C'$; nous avons $F(\gamma_1)(F(\eta)(y)) = C'$.

Supposons maintenant que $(C', c) \rightarrow (C', c')$ et $F(\gamma'_1)(y') = C'$.

Considérons le diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & O & & O & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ O & \rightarrow & C_0 & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & C_2 \rightarrow O \\ & & \downarrow I_{C_0} & & \downarrow \eta + \gamma_1 & & \downarrow \alpha \oplus I_{C_2} \\ O & \rightarrow & C_0 & \rightarrow & C_1 \oplus C_2 & \rightarrow & C'_2 \oplus C_2 \rightarrow O \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & C'_2 & & C'_2 \\ & & & & \downarrow I_{C'_2} & & \downarrow \\ & & & & O & & O \end{array}$$

L'élément $y' \oplus c \in F(C'_1 \oplus C_2)$ s'envoie sur $c' \oplus c \in F(C'_2 \oplus C_2)$ et ensuite sur $0 \in F(C'_2)$. Puisque F est semi-exacte, il existe un élément $y \in F(C_1)$ qui s'envoie sur $y' \oplus c$. On a alors $F(\gamma_1)(y) = c$. C.Q.F.D.

Lemme 1-3-5 : $F(C_2) \rightarrow R^1_k F(C_0) \rightarrow R^1_k F(C_1)$ est exacte

Démonstration : Soit $(C, c) \in R^1_k F(C_0)$ tel que $R^1_k F(\gamma_0)((C, c)) = 0$. Alors dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X_{C_0} : & O & \rightarrow & C_0 & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{C}_1 & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & X \rightarrow O \\ & & & \downarrow \gamma_0 & & \downarrow \eta & & \downarrow I_X \\ & & & O & \rightarrow & C_1 & \xrightarrow{\psi} & D \rightarrow X \rightarrow O \end{array}$$

commutatif où la première ligne est dans la classe (C, c) , on a un élément $y \in F(D)$ tel que $F(\partial)(y) = c$. Or le Lemme 1-3-2 dit que la suite : $(X_{C_0}) : O \rightarrow C \xrightarrow{\gamma, \gamma_0} \tilde{C}_1 \oplus C_1 \xrightarrow{\eta + \psi} D \rightarrow O$ est exacte et que $(X_{C_0}, y) \rightarrow (X_{C_0}, x)$. D'autre part, les suites exactes $(X_{C_0}), (C)$ se plongent dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} (X_{C_0}) & O & \rightarrow & C_0 & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{C}_1 \oplus C_1 & \xrightarrow{\eta + \varphi} & D \rightarrow O \\ & & & \downarrow I_{C_0} & & \text{proj. can} & \downarrow \tilde{\psi} & \\ & & & O & \rightarrow & C_0 & \xrightarrow{\gamma_0} & C_1 \xrightarrow{\gamma_1} C_2 \rightarrow O \end{array}$$

ce qui démontre que $[C, c]$ est dans l'image de ∂^0 . Si (C, c) est dans l'image de ∂^0 , il est trivial que $R^1_k F(\gamma_0)((C, c)) = 0$

Lemme 1-3-6 : $R^1_k F(C_0) \xrightarrow{R^1_k F(\gamma_0)} R^1_k F(C_1) \xrightarrow{R^1_k F(\gamma_1)} R^1_k F(C_2)$ est exacte.

Démonstration : Il est évident que la composition est nulle.

Si $R^1_k F(\gamma_1)((E, X)) = 0$, dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & O & & O & & \\ O & \rightarrow & C_0 & \xrightarrow{I_{C_0}} & C_0 & \rightarrow & O \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow \Phi_0 \gamma_0 & & \\ O & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & E & \rightarrow & A \rightarrow O \\ & & \downarrow & & \downarrow n & & \downarrow I_A \\ O & \rightarrow & C_2 & \xrightarrow{\psi} & E & \xrightarrow{\varphi} & A \rightarrow O \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & O & & O & & O \end{array}$$

on a un élément $y \in F(E)$ tel que $F(\psi)(y) = x$. Or on en tire le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 : & O & \rightarrow & C_0 & \xrightarrow{\psi \circ \gamma_0} & E & \xrightarrow{\eta} & E \rightarrow O \\ & & & \downarrow \gamma_0 & & \downarrow I_E & & \downarrow \varphi \\ E : & O & \rightarrow & C_1 & \xrightarrow{\psi} & E & \xrightarrow{\varphi} & A \rightarrow O \end{array}$$

qui donne $\text{Ext}^1_{\mathfrak{H}_k}(\varphi, C_1)(E) = \text{Ext}^1_{\mathfrak{H}_k}(E, \gamma_0)(X_0)$, et $(E, x) = (E, F(\varphi)(y)) = (\text{Ext}^1_{\mathfrak{H}_k}(E, \gamma_0)(X), y) = \text{Ext}^1_{\mathfrak{H}_k}(E, \gamma_0)[X_0, \gamma_0]$.

En appliquant le Lemme 1-3-3, nous trouvons par induction que $\text{Ext}^i_{\mathfrak{H}_k}(B, \quad)$ est un foncteur cohomologique covariant.

En dualisant la catégorie $\mathfrak{H}$ nous trouvons avec les hypothèses du Théorème 1-3-1.

Théorème 1-3-1* : La suite des foncteurs $\text{Ext}_{\mathfrak{R}_k}^i(, C)$ forme un foncteur cohomologique contravariant.

Remarque 1-3-1 : Pour un foncteur covariant additif quelconque, on a effectivement montré que $(R^i_k F)$ forme un foncteur cohomologique additif si l'on fait la convention $R^0 F = F$.

4) Catégorie abélienne au sens de Heller.

Une catégorie additive $\mathfrak{R}$ pourvue d'une classe admissible de "morphismes propres" K est dite abélienne au sens de Heller si les axiomes suivants sont satisfaits :

I) $I_A \in K$ pour $A \in \mathfrak{R}$

II) si $f \in K$ et $g \in K$ sont des épimorphismes, alors : $f \circ g \in K$, dually si $f \in K$ et $g \in K$ sont des monomorphismes, alors $g \circ f \in K$,

III) si $fg \in K$ est un monomorphisme, alors : $g \in K$, si $hf \in K$ un est épimorphisme, alors : $h \in K$.

IV) si dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & O & & O & & O \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 O & \rightarrow & A_1 & \rightarrow & B_1 & \rightarrow & C_1 \rightarrow O \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 O & \rightarrow & A_2 & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & C_2 \rightarrow O \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 O & \rightarrow & A_3 & \rightarrow & B_3 & \rightarrow & C_3 \rightarrow O \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & O & & O & & O
 \end{array}$$

toutes les colonnes et les deux premières lignes sont des suites exactes de morphismes dans K , alors la dernière ligne est une suite exacte de morphismes dans K . Pour une étude détaillée des catégories abéliennes au sens de Heller (voir 15).

Lemme 1-4-1 : Si $\mathfrak{R}_k$ est une catégorie abélienne au sens de Heller et $\gamma_i : C_i \rightarrow C_1 \oplus C_2$, $i = 1, 2$ est une représentation de somme directe, alors $X_i \in K$.

Démonstration : Soit $\eta_i^{C_1 \oplus C_2} : C_1 \oplus C_2 \rightarrow C_i$ les morphismes de. Remarque 1-1-1. Nous avons $\eta_i^{C_1 \oplus C_2} = I_{C_i}$; l'axiome III implique $X_i \in K$.

Théorème 1-4-1 : Si la catégorie $\mathfrak{R}$ pourvue d'une classe admissible de morphismes, K , est abélienne au sens de Heller alors $\mathfrak{R}$ a une K -structure. abélienne au sens de 1-3.

Démonstration : Montrons la condition (1) de la définition d'une catégorie avec K -structure abélienne (voir 1-3). Supposons $(E) \begin{matrix} O \rightarrow B \xrightarrow{\beta} E \\ \uparrow \quad \uparrow \\ A \rightarrow O \end{matrix}$, $\beta \in K$, est une suite exacte et $((A \xrightarrow{\alpha} A, B \xrightarrow{\beta} B'), (E))_{E \in \mathfrak{R}}$ est un coin. Considérons les suites exactes.

$$\begin{aligned}
 (B \oplus B') \quad O &\rightarrow B \xrightarrow{I_B \cdot \xi} B \oplus B' \xrightarrow{\xi + I_{B'}} B' \rightarrow O \\
 (E \oplus B') \quad O &\rightarrow B \oplus B' \xrightarrow{\beta \oplus I} E \oplus B' \rightarrow A \rightarrow O
 \end{aligned}$$

L'axiome II donne $I_3 \cdot \xi = (I_B \oplus -\xi) \circ \Delta_B \in K$. De même l'axiome II implique $\varepsilon \circ \eta_{B \oplus B'} \in K$.

Nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 O & \rightarrow & O & & O & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 O & \rightarrow & B & \rightarrow & B & \rightarrow & O \rightarrow O \\
 & & \downarrow & & I_B \cdot \xi \downarrow & & \downarrow \\
 O & \rightarrow & B \oplus B' & \xrightarrow{\beta \oplus I_{B'}} & E \oplus B' & \rightarrow & A \rightarrow O \\
 & & \downarrow & & \xi + I_{B'} \downarrow & & \downarrow I_A \\
 O & \rightarrow & B' & \rightarrow & E' & \rightarrow & A \rightarrow O \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 O & & O & & O & &
 \end{array}$$

où toutes les colonnes et les deux premières lignes, sont des suites exactes dans K . Nous déduisons de l'axiome IV que la dernière ligne est une suite exacte dans K . Celle-ci est un relèvement universel. En effet, si $(E'') \quad O \rightarrow B' \xrightarrow{b} E'' \rightarrow A \rightarrow O$ est un relèvement du coin $(A \rightarrow A, B \rightarrow B)$, $(E)_{E^1}$, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 O & \rightarrow & B & \xrightarrow{I_A \cdot \xi} & B & \xrightarrow{\beta \cdot \xi} & O \rightarrow O \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 O & \rightarrow & B \oplus B' & \xrightarrow{\beta \oplus I_{B'}} & E \oplus B' & \rightarrow & A \rightarrow O \\
 & & \downarrow & & \xi + I_{B'} \downarrow & & \downarrow I_A \\
 (E'') \quad O & \rightarrow & B' & \xrightarrow{b} & E & \xrightarrow{e} & A \rightarrow O \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & O & & O & & O
 \end{array}$$

où toutes les colonnes et toutes les lignes sont exactes. Il est, alors, facile à démontrer qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (E') & O & \rightarrow & B' & \xrightarrow{b} & E' & \xrightarrow{e} & A \rightarrow O \\
 & \downarrow & & \downarrow I_{B'} & & \downarrow & & \downarrow I_A \\
 (E'') & O & \rightarrow & B' & \rightarrow & E'' & \rightarrow & A \rightarrow O
 \end{array}$$

Ce qui montre que (E') est un relèvement universel du coin $((A \xrightarrow{I_e} A, B \xrightarrow{\xi} B'), (E)_{E^1})$. Par dualité nous avons l'existence des relèvements universels aux cocoins $((A \leftarrow A', B \xleftarrow{I_B} B), (E)_{E^1})$. Montrons, maintenant, la condition (2) de la définition d'une catégorie avec K -structure abélienne. Si dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 O & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow O \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \\
 O & \rightarrow & A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C \rightarrow O
 \end{array}$$

les lignes sont exactes et dans K , $\alpha \in K$ est un épimorphisme alors, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{IA} & A & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \rightarrow & C \xrightarrow{I\xi} 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où toutes les lignes sont exactes et dans K et la première colonne est exacte et dans K . Il s'en suit que la deuxième colonne est exacte. Le composé de deux monomorphismes dans K étant un monomorphisme dans K , nous trouvons que $\beta = \xi \circ \alpha \in K$. La démonstration peut être dualisée pour démontrer que si dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow I_A & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\
 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' \rightarrow 0
 \end{array}$$

où les deux lignes sont exactes avec $\eta, \eta' \in K, \gamma \in K$ un monomorphisme, alors $\beta \in K$ est un monomorphisme. C.Q.F.D.

5) L'Homologie.

Nous disons qu'une catégorie $\mathfrak{R}$, qui est K -abélienne, est **avec homologie** si elle satisfait à l'axiome III de Heller. Supposons que $\mathfrak{R}_K$ soit avec homologie. Soit (X_n, ∂_n) un complexe dans $\mathfrak{R}_K$ (c'est-à-dire une suite d'objets X_n et de morphismes $\partial_n : X_n \rightarrow X_{n-1} \in K$ tels que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0_{X_{n-1}} \circ 0_{X_{n+1}}$ où $\partial_n \in K$ pour tout n). Ecrivons $Z_n(X)$ le noyau de ∂_n , $B_n(X)$ l'image de ∂_{n+1} . Comme dans le cas classique; nous trouvons une suite exacte :

$$0 \rightarrow B_n(X) \rightarrow Z_n(X) \rightarrow H_n(X) \rightarrow 0$$

où $B(X)$, $Z(X)$ et $H(X)$ sont appelés respectivement les bords, les cycles, et l'homologie de dimension n de X . Il évident qu'une suite de morphismes $(f_n) : (X_n, \partial_n) \rightarrow (Y_n, \partial_n)$ tels que $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ et $\partial_n f_n = f_n \partial_n$ définit des homomorphismes $(f_n) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.

Par la règle $X \cdot n = X^n, \partial_n = \delta^n$, nous trouvons les définitions de la cohomologie.

6) Foncteurs dérivés.

Un objet P d'une catégorie $\mathfrak{R}$ K -abélienne est dite **projectif** si pour toute suite exacte de morphismes dans K

$$0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow 0$$

la suite induite

$0 \rightarrow \text{Hom } \mathfrak{R}(P, C_1) \rightarrow \text{Hom } \mathfrak{R}(P, C_2) \rightarrow \text{Hom } \mathfrak{R}(P, C_3) \rightarrow 0$ est exacte. On a immédiatement la

Proposition 1-6-I. : Si P est projectif, $\text{Ext}^n_{\mathfrak{R}_K}(P, C) = 0$

pour tout $C \in \mathfrak{K}_k$ et $n \in \mathbb{Z}$. Dualement un objet Q de $\mathfrak{K}_k$ est dit injectif si pour toute suite exacte de morphismes dans K $0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow 0$ la suite induite $0 \rightarrow \text{Hom } \mathfrak{K}(C_3, Q) \rightarrow \text{Hom } \mathfrak{K}(C_2, Q) \rightarrow \text{Hom } \mathfrak{K}(C_1, Q) \rightarrow 0$ est exacte.

Proposition 1-6-1 * : Si Q est injectif $\text{Ext}^n_{\mathfrak{K}_k}(C, Q) = 0$ pour tout $C \in \mathfrak{K}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

En vue de la dualité nous nous occupons uniquement des objets projectifs.

Nous disons que la catégorie $\mathfrak{K}$ a **suffisamment de projectifs** si nous avons pour chaque objet $C \in \mathfrak{K}$ un projectif $P(C)$ et une suite exacte $0 \rightarrow P(C) \xrightarrow{\omega} C \rightarrow 0$, $\omega \in K$.

Soit $(A)^n = P(\Omega^{n-1})$ où Ω^{n-1} est défini par la suite $0 \rightarrow \Omega^{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} P(\Omega^{n-2}) \rightarrow \Omega^{n-2} \rightarrow 0$, $\pi_{n-1} \in K$, et $\Omega^0 = A$.

$(A)^n$ est appelé une **résolution projective** de A .

Si $F : \mathfrak{K}_k \rightarrow \mathfrak{K}'_k$, où $\mathfrak{K}'$ est K' -abélienne avec homologie, est un foncteur additif, contravariant, propre, exact à gauche, les groupes de cohomologie de $F((A)^n)$, $\delta^n = \omega_{n-1} \circ \pi_n$ sont par définition les foncteurs dérivés à droite de F . $H^n(F((A)^n))$ sera désigné, par abus de langage, $R^n_K F(A)$.

Si F est covariant exact à gauche, nous trouvons par la règle $\chi^n = \chi_n$ la définition des foncteurs dérivés à gauche $L^n_K F(A)$.

Pour la démonstration prouvant que $R^n_K F$ et $L^n_K F$ sont bien définis, voir (15).

La Proposition 1-6-1 et le Théorème 1-3-1 impliquent la

Proposition 1-6-2 : $\text{Ext}^n_{\mathfrak{K}_k}(A, C) \approx R^n_K \text{Hom } \mathfrak{K}(A, C)$.

Lemme 1-6-1 : Soient $\mathfrak{K}$ une catégorie avec K -structure abélienne au sens du 1-3 ayant suffisamment de projectifs. Si $0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{\gamma_1} C_2 \xrightarrow{\gamma_2} C_3 \rightarrow 0$ est une suite exacte telle que $\gamma_i \in K$, alors il existe une suite de projectifs

$$(P) \quad 0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow 0$$

et un morphisme $(\pi) = \pi : (P) \rightarrow (C)$ $\pi_i \in K$ tels que les π_i soient des épimorphismes dans K .

Démonstration : Soient $\pi_3 = \gamma_2 \circ \eta : P_3 \rightarrow C_3$ où $\eta : P_3 \rightarrow C_2$ est un épimorphisme propre et $\pi_1 : P_1 \rightarrow C_1$ un épimorphisme propre.

$\pi_2 = \gamma_1 \circ \pi_1 + \eta : P_2 \rightarrow C_2$ est un épimorphisme propre.

Théorème 1-6-1 : Supposons $\mathfrak{R}$ une catégorie K-abélienne au sens du 1-3 avec suffisamment de projectifs, $\mathfrak{R}'$ une catégorie K'-abélienne au sens de Heller, et $F : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'$ un foncteur covariant (respectivement contravariant), additif, propre, exact à droite (exact à gauche). Alors les foncteurs dérivés $L_n^k F$ (respectivement $R_k^n F$) forment un foncteur homologique (respectivement cohomologique) covariant (respectivement contravariant).

Pour la démonstration, voir (15).

Un foncteur cohomologique contravariant (covariant)

$F = (F_i) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'$ est dit **universel** si pour tout foncteur (cohomologique contravariant (covariant)) $F' = (F'_i) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'$ et toute transformation de foncteurs $\varphi : F_0 \rightarrow F'_0$ il existe une transformation de foncteurs et une seule $\psi = (\psi_i) : F \rightarrow F'$ telle que $\psi_0 = \varphi$.

Proposition 1-6-3 : Avec les hypothèses du théorème, $R_k^n F$ (respectivement $L_n^k F$) est un foncteur universel.

Démonstration : Il suffit de prouver que si $F' = (F'_0, F'_1)$ est un foncteur cohomologique, et $\varphi : R_k^n F \rightarrow F'_0$ une transformation de foncteurs, alors il existe une transformation de foncteurs unique $\psi = (\varphi, \psi_1) : (R_k^n F, R_k^n F) F'.$ Soit $A \in \mathfrak{R}$, considérons la suite exacte $0 \rightarrow \Omega(A) \xrightarrow{\omega} P(A) \rightarrow A \rightarrow 0$. Si on a pu construire ψ_1 , on aura un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} R_k^0 F(P(A)) & \xrightarrow{\varphi} & R_k^0 F(\Omega(A)) & \rightarrow & R_k^1 F(A) \rightarrow 0 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi_1 \\ (F')^0(P(A)) & \rightarrow & (F')^0(\Omega(A)) & \rightarrow & (F')^1(A) \rightarrow (F')^1(P(A)) \end{array}$$

La première ligne étant exacte, on en conclut que le morphisme $R_k^0 F(\Omega(A)) \rightarrow R_k^1 F(A)$ est un épimorphisme, et par suite que le morphisme $\psi_1(A) : R_k^1 F(A) \rightarrow (F')^1(A)$ est complètement déterminé par passage au quotient à partir de φ , ce qui prouve l'unicité de ψ_1 . D'ailleurs, le diagramme précédent sans ψ_1 , compte tenu du fait que le produit des deux morphismes de la deuxième ligne est nul, permet de définir un morphisme $\psi_1(A) : R_k^1 F(A) \rightarrow (F')^1(A)$ de façon unique par la condition que le diagramme reste commutatif.

Remarque 1-6-1 : Supposons que $F : \mathfrak{R}_k \rightarrow M$, où M est la catégorie des groupes abéliens, est un foncteur semi-exact (c'est-à-dire, si $0 \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow 0$ est exacte dans $\mathfrak{R}_k$, alors $F(X_0) \rightarrow F(X_1) \rightarrow F(X_2)$ est exacte dans M), les $R_k^n F$ de 1-6 et de 1-3 sont les mêmes.

7) Suite spectrale.

Soit $\mathfrak{R}$ une catégorie avec K-structure abélienne au sens de Heller. Soit $A \in \mathfrak{R}$, une K-filtration (décroissante) sur A est une famille $(F^n(A))$ de sous-trucs avec un monomorphisme de $F^n(A)$ dans $F^{n-1}(A)$ avec $F^{-\infty}(A) = A$; un objet K-filtré dans $\mathfrak{R}$ est un objet muni d'une K-fil-

tration. Si $A, B \in \mathfrak{R}$ sont K -filtrés, un morphisme $u : A \rightarrow B$ est dit compatible avec la K -filtration si $u(F^n(A)) \subset F^n(B)$ pour tout n . Une suite spectrale cohomologique dans $\mathfrak{R}$ est un système $E = (E_{\gamma}^{p,q}, E^n)$ formé

a) d'objets $E_{\gamma}^{p,q}, E^n \in \mathfrak{R}$ définis pour $\gamma \geq 1$ et $p, q < 0$; pour $p < 0$ ou $q < 0$, $E_{\gamma}^{p,q} = 0$,

b) de morphismes $d_{\gamma}^{p,q} : E_{\gamma}^{p,q} \rightarrow E_{\gamma+1}^{p+\gamma, q-\gamma+1}$ dans K tels que $d_{\gamma}^{p+\gamma, q-\gamma+1} \circ d_{\gamma}^{p,q} = 0$;

c) d'isomorphismes $\alpha_{\gamma}^{p,q} : K \in d_{\gamma}^{p,q} / I_{d_{\gamma-1}^{p-\gamma, q+\gamma-1}} E_{\gamma+1}^{p,q} :$

d) d'objets K -filtrés $E^n \in \mathfrak{R}$ définis pour tout n ; on suppose que $\text{Im } E^n(F^p) \rightarrow E^n = F^p(E^n) = E^n$ pour p assez petit;

e) d'isomorphismes $\beta^{p,q} : E_{\gamma}^{p,q} \rightarrow G^p(E^{p+q})$ où G^p est le gradué associé (c'est-à-dire, $G^n(A) = F^n(A)/F^{n+1}(A)$).

Un morphisme u d'une suite spectrale $E = (E_{\gamma}^{p,q}, E^n)$ dans une autre suite spectrale $E' = (E'_{\gamma}^{p,q}, E'^n)$ consiste en un système de morphismes $U_{\gamma}^{p,q} : E_{\gamma}^{p,q} \rightarrow F'_{\gamma}^{p,q}$ et $U^n : E^n \rightarrow E'^n$ compatibles avec les filtrations, commutant avec les morphismes $d_{\gamma}^{p,q}, \alpha_{\gamma}^{p,q}$ et $\beta_{\gamma}^{p,q}$.

Les morphismes répondant à cette définition nous donnent une structure de catégorie additive sur les suites spectrales dans $\mathfrak{R}$.

Soit $K^{p,q} \in \mathfrak{R}$ un K -bicomplexe dans $\mathfrak{R}$, c'est-à-dire les opérateurs cobords $d_I : K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}$ et $d_{II} : K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1}$ sont dans K . Nous supposons $d_I d_{II} = d_{II} d_I$. L'opérateur total est donné par $d(\times) = d_I(\times) + (-1)^p d_{II}(\times)$ où $\times \in K^{p,q}$. Soit $K^{p,q} = 0$ pour p ou $q < 0$. Si l'on écrit $K^n = \sum_{p+q=n} K^{p,q}$ et $F_{II}^q(K) = \sum_{\gamma=p,q} K^{\gamma,q}$ nous trouvons une suite spectrale cohomologique aboutissant à $H^*(K)$ où K est considéré avec sa différentielle totale. Le terme initial $E_{II}^{p,q}(K) = H_{II}^{p+q,p} F_I(K) / F_I^{p+1}(K)$. L'homologie est prise par rapport à d_{II} et d_I , respectivement. Avec la filtration $F_{II}^q(K) = \sum_{\gamma=q} \sum_p K^{p,\gamma}$ nous trouvons une autre suite spectrale aboutissant à $H^*(K)$ avec terme initial $H_{II}^{q+p}(E_{II}^q(K) / F_{II}^{q+1}(K))$ (voir (6)).

Soient $\mathfrak{R}_1$ une catégorie avec K -structure abélienne au sens du 1-3, $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_3$ deux catégories avec structures abéliennes au sens de Heller déterminées par K_2 et K_3 respectivement, où $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ ont suffisamment de projectifs et $F : \mathfrak{R}_1 \rightarrow \mathfrak{R}_2$ un foncteur covariant propre, additif, exact à droite $G : \mathfrak{R}_1 \rightarrow \mathfrak{R}_3$ un foncteur contravariant propre, additif, exact à gauche, on va indiquer la construction d'une suite spectrale aboutissant à $R^n(G \circ F)$ dont le terme $E_{\gamma}^{p,q}(A) = R^p G(L_q F(A))$. (Sous l'hypothèse qu'il existe une fonction qui associe à un objet de $\mathfrak{R}_1$ une résolution projective telle que $F(A_n)$ est G -acyclique, (c'est-à-dire $H_m(G(F(A_n))) = 0$ pour $m > 1$).

Nous disons qu'un K -double complexe $X^{p,q}$ est une résolution projective d'un objet de $\partial \mathfrak{R}^{\infty}$ si $X^{p,*}$ est une résolution projective de A^p, B_1^* .

une résolution projective de $B^p(A)$ et $HP_I^*(X)$ une résolution projective de $HP(A)$. S'inspirant de Cartan-Eilenberg (7), on peut démontrer que: chaque complexe propre d'une catégorie avec structure abélienne admet une résolution projective. Notons X^q une résolution projective de $F(A)$ dans $\mathcal{R}_2$. Soit γ^q le bi-complexe cohomologique $G(X^p, q)$ dans $\mathcal{R}_2$. G étant exact sur les projectifs, nous trouvons $H_{II}^q(H_I^p(Y)) = R^q G(L_p F(A))$. $F(A)$ étant G -acyclique, nous trouvons que $H_I^p(H_{II}^q(Y)) = 0$ pour $q > 0$ et $H_I^p(H_{II}^0(Y)) \approx R^p(G \circ F)(A)$ pour $p > 0$. Ce qui démontre qu'il y a une suite spectrale aboutissant à $R^n(G \circ F)(A)$ avec terme $EP^q(A) = R^p G(L_q F(A))$. Pour la démonstration prouvant que tout ceci est bien défini (c'est-à-dire, ne dépend pas de choix des résolutions projectives), comme pour les détails de cette section, voir (7) et (13).

CHAPITRE II

categories simpliciales

I) Définition des catégories simpliciales (propriétés élémentaires).

Soit $\mathfrak{K}$ une catégorie. La catégorie des $\mathfrak{K}$ -simpliciaux (4) se définit de la manière suivante : Considérons la catégorie Δ définie comme suit : Un objet Δ_n de Δ est la suite d'entiers $(0, 1, \dots, n-1, n)$. Les morphismes de Δ sont les applications faiblement croissantes $\Delta_p \rightarrow \Delta_q$.

On notera que tout morphisme s'obtient par composition des morphismes identiques $\Delta_n \rightarrow \Delta_n$ et des morphismes de la forme :

$$\delta_i : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1} \quad (\text{tel que } S_i(p) = p \text{ pour } p < i, \\ S_i(p) = p+1 \text{ pour } p > i)$$

$$\text{et } \sigma_i : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n-1} \quad (\text{tel que } \sigma_i(p) = p \text{ pour } p < i \\ \text{et que } \sigma_i(p) = p-1 \text{ pour } p < i)$$

Un objet de la catégorie des $\mathfrak{K}$ -simpliciaux est un foncteur contravariant F de la catégorie Δ dans la catégorie $\mathfrak{K}$; et un morphisme de la catégorie des $\mathfrak{K}$ -simpliciaux est une transformation de foncteurs $\mathfrak{K} T \rightarrow T'$. La catégorie des $\mathfrak{K}$ -simpliciaux sera écrite $\mathfrak{K}$.

Des relations évidentes entre les S_i et les σ_i , il est facile de voir que $\mathfrak{K}$ peut encore se formuler de la manière suivante (voir 4) : un objet K de $\mathfrak{K}$ est défini par la donnée d'une suite (K_n) (n en entier $< \infty$) d'objets de $\mathfrak{K}$, et pour chaque n , de deux suites d'applications

$$d_i : K_n \rightarrow K_{n-1} \quad (0 < i < n, n > 1)$$

$$S_i : K_n \rightarrow K_{n+1} \quad (0 < i < n, n > 0)$$

qui sont des morphismes de la catégorie $\mathfrak{K}$. Les d_i ("opérateurs de faces") et les S_i ("opérateurs de dégénérescence") sont en outre assujettis aux relations suivantes :

$$(1) \quad \begin{array}{ll} d_i d_j = d_{j-1} d_i & \text{pour } i < j \\ S_i S_j = S_{j+1} S_i & \text{pour } i < j \\ S_{j-1} d_i & \text{pour } i < j \\ d_i S_j = \text{identité} & \text{pour } i = j \text{ ou } i = j+1 \\ S_j d_{i-1} & \text{pour } i > j+1 \end{array}$$

Un morphisme $\Phi : (K_n) \rightarrow (K'_n)$ est une suite de morphismes $\Phi_n : K_n \rightarrow K'_n$ de la catégorie $\mathfrak{K}$, tels que

$$\begin{array}{ll} d_i \Phi_n = \Phi_{n-1} d_i & \text{pour } 0 < i < n, n > 1 \\ S_i \Phi_n = \Phi_{n+1} S_i & \text{pour } 0 < i < n, n > 0 \end{array}$$

En mettant $d_i = K(S_i)$, $\delta_i = K(\sigma_i)$ et $K_n = K(\Delta_n)$ ou K est un foncteur contravariant de Δ dans $\mathfrak{K}$, il est facile de démontrer à partir des relations évidentes entre les S_i et σ_i , que ces deux définitions sont équivalentes, où les morphismes sont les transformations naturelles de foncteurs à valeurs dans $\mathfrak{K}$.

Les relations entre les d_i et les S_i permettent d'écrire sous une forme canonique toute $Kp \rightarrow Kq$ composée d'applications de la forme d_i ou S_i ; à savoir $S_{i_1} \dots S_{i_K} d_{j_1} \dots d_{j_h}$
avec $i_1 > \dots > i_K$. $j_1 < \dots < j_h$

Sur K_n , cette application est définie $S_i j_h < p$, $i_1 < p - h + k$, et c'est alors, une application $K_n \rightarrow K_n - h + K$. Lorsque les K_n ont une structure ensembliste, un élément $x \in K_n$ est "dégénéré" s'il appartient à l'image d'une application S_i ; tout $x \in K_n$ s'écrit d'une seule manière $S_{i_1} \dots S_{i_K} y$ où y est non-dégénéré, et $i_1 > \dots > i_K$ (k pouvant être nul) (12).

Soient maintenant K et K' deux ensembles simpliciaux. On définit l'ensemble simplicial $K \times K'$ comme suit : $(K \times K')_n = K_n \times K'_n$ (produit ensembliste), et $d_i(x, x') = (d_i x, d_i x')$, $s_i(x, x') = (s_i x, s_i x')$ pour $x \in K_n$, $x' \in K'_n$.

Soient X et B deux ensembles simpliciaux, et soit $p : X \rightarrow B$ une application simpliciale surjective. On dit que p est une **fibration** si, pour tout $n \geq 0$, et pour tout système d'éléments

$b \in B_n$, $x_i \in X_{j-1}$ ($0 < i < n$, $i \neq k$ où $0 < k < n$) satisfaisant à
 $p(x_i) = d_i b$ pour tout i , et $d_i x_j = d_j - 1 x_i$, pour $i < j$,

il existe au moins un $x \in X_n$ tel que

$p(x) = b$ et $d_i x = x_i$ pour tout $i \neq k$.

Une fibration $p : X \rightarrow B$ est dite **minimale** si pour $y, y' \in X_{q+1}$ avec $p(y) = p(y')$ et $d_i y = d_i y'$ pour $i \neq k$, nous avons $d_k(y) = d_k(y')$.

De même, nous disons qu'un ensemble simplicial (K_n) est un complexe de Kan si l'application de K sur un "complexe ponctuel" X (ensemble simplicial formé des dégénérés d'un sommet $x \in X_0$) est une fibration. Un complexe de Kan est dit **minimal** (31) si $d_i x = d_i y$, $i \neq k$, implique $d_k x = d_k y$. Nous savons que X est minimal s'il existe une fibration $p : X \rightarrow B$ où B est minimal.

Si K est un complexe de Kan, on peut définir les **groupes d'homotopie** $\pi_n(K, k)$, où $k \in K_0$ (16).

Soit $p : X \rightarrow B$ une fibration. Choisissons un sommet $b_0 \in B_0$, et soit F la fibre au-dessus du "complexe ponctuel" engendré par b_0 et $i : F \rightarrow E$ l'injection. C'est évidemment un complexe de Kan, on voit facilement que

pour que X soit un complexe de Kan, il faut et il suffit que B soit un complexe de Kan.

Supposons qu'il soit ainsi ; nous avons une suite exacte (4)

$$\dots \rightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i^\#} \pi_n(X) \xrightarrow{p^\#} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \rightarrow \dots$$

Dans le cas particulier d'un groupe simplicial G (G_n), les groupes d'homotopie $\pi_n(G, e)$ peuvent être calculés comme suit (4) : Soit $M(G)_n = \bigcap_{0 \leq i \leq n} \text{Ker } d_i$, $d_i : G_n \rightarrow G_{n-1}$; alors d_0 induit un homomorphisme $\partial_n : M(G)_n \rightarrow M(G)_{n-1}$ et on a ainsi une suite d'homomorphismes

$$\dots M(G)_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} M(G)_n \xrightarrow{\partial_n} M(G)_{n-1} \dots \quad (G)_0 = G_0 = G$$

telle que le composé de deux homomorphismes consécutifs soit "neutre". De plus, il est immédiat que $\text{Im } \partial_{n+1}$ est un sous-groupe invariant de $\text{Ker } \partial_n$; on peut donc considérer le groupe quotient

$$\text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$$

qui n'est autre que $\pi_n(G, e)$.

Soit K un ensemble simplicial, et soit $C(K)$ le groupe abélien libre simplicial ayant comme base les éléments de K_n , où $d_i : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ (respectivement $s_i : C_n(K) \rightarrow C_{n+1}(K)$) est l'application induite par $d_i : K_n \rightarrow K_{n-1}$ (respectivement $s_i : K_n \rightarrow K_{n+1}$). $C_n(K)_n$ dénotera le quotient de $C(K)_n$ par le sous-groupe engendré par les "dégénérés". $C_N(K)$ est appelé les chaînes "normalisées" de K .

Les groupes d'homologie $H_n(C(K))$ sont classiquement notés $H_n(K)$ où $\partial = \sum (-1)^i d_i : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$

Nous avons (4) l'isomorphisme naturel $\pi_n(C(K)) \xrightarrow{\sim} H_n(K)$. Il est classique (12) que $H_n(C(K)) \approx H_n(C_N(K))$.

De même que chaque complexe simplicial X satisfaisant à la condition de Kan contient un sous-complexe minimal N qui est un rétracte de déformation de X (i.e., il existe une application simpliciale $F : \Delta_1^\sim \times X \rightarrow X$ tel que $F(\sigma, \tau) = \tau$ pour $\tau \in M$, $F(S_0^q(0), \tau) = \tau$, et $F(S_0^q(1), \tau) \in M$ pour tout $\tau \in \chi_q$), nous avons (31) pour les fibrations les théorèmes suivants :

Théorème 2 - 3 - 1 : Soit $p : X \rightarrow B$ une fibration où X et B sont de Kan et sont connexes (un ensemble simplicial de Kan y est dit connexe et si pour $y, y' \in Y_0$ il existe $y'' \in Y_1$ tel que $d_0 y'' = y$, $d_1 y'' = y'$) et soit B' un sous-complexe minimal de même type d'homotopie que B . Posons $E' = p^{-1}(B')$.

Alors :

- (1) $p : E' \rightarrow B'$ est une fibration,
- (2) Il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E \times \Delta_1^{\sim} & \xrightarrow{F} & E \\ \downarrow p \times \tau \Delta_1^{\sim} & & \downarrow p \\ B \times \Delta_1^{\sim} & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

tel que $F(\sigma, \tau) = \sigma$, Pour $\sigma \in E'$
 $F(\sigma, S_o^q(0) = \sigma$, pour $\sigma \in Eq$, et
 $F(\sigma, S_o^q(1)) \in Eq$, pour $\sigma \in Eq$

Théorème 2.1-2 : Avec les hypothèses du théorème précédent, supposons que B soit minimal, alors il existe E' E tel que

- (1) $p : E' \rightarrow B$ soit une fibration minimale, et
- (2) il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E \times \Delta_1^{\sim} & \xrightarrow{F} & E \\ \downarrow p \times \tau \Delta_1^{\sim} & & \downarrow p \\ B \times \Delta_1^{\sim} & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

tel que $F(\sigma, \tau) = \sigma$, pour $\sigma \in E'$, $\tau \in T$
 $F(\sigma, S_o^q(0) = \sigma$, pour $\sigma \in Eq$
 $F(\sigma, S_o^q(1)) \in E'q$ pour $\sigma \in Eq$ et
 $f(\sigma, \tau) = \sigma$, pour $\sigma \in B$, $\tau \in \Delta_1^{\sim}$

Désormais, sauf mention contraire, quand nous parlerons d'un sous-complexe minimal M d'un complexe X , nous entendrons un rétracte de déformation de X ; de même, dans le cas des fibrations $p : X \rightarrow B$ par les sous-fibrations minimales $p' : X' \rightarrow B'$ nous entendrons "un rétracte de déformation" de $p : X \rightarrow B$.

On va s'intéresser à une classe spéciale de fibres simpliciaux, appelés **fibres principaux**.

Soit F un groupe simplicial ; supposons que F opère à gauche dans un ensemble simplicial X , c'est-à-dire que l'on ait une application simpliciale $g : F \times X \rightarrow X$ telle que $g(1_n, x) = x$ (pour $x \in X_n$, et en notant 1_n l'élément neutre de F_n), et que $g(u, g(v, x)) = g(uv, x)$ pour $u, v \in F_n$ et $x \in X_n$. Notons désormais $u \cdot x$ l'élément $g(u, x)$. Considérons la relation d'équivalence, dans X , définie par F : deux éléments $x, y \in X_n$ sont équivalents si et seulement s'il existe $u \in F_n$ tel que $y = u \cdot x$. Le quotient de X par cette relation est un ensemble simplicial B ; soit $p : X \rightarrow B$ l'application de X sur son quotient.

Faisons maintenant l'hypothèse :

$$u \in F_n, x \in X_n \text{ et } u \cdot x = x \text{ entraîne } u = 1_n ;$$

on dira alors que X est un **fibré principal** de base B et de **groupe structural** F . En se servant du Lemme : Tout groupe simplicial satisfait à la condition d'extension de Kan, h , Cartan a démontré (5) la

Proposition 2-1-1 : Si X est un fibré principal de base B , alors l'application canonique $p : X \rightarrow B$ est une fibration. **Corollaire 1 :** Soient G et H deux groupes simpliciaux et $p : G \rightarrow H$ un homomorphisme simplicial surjectif ; alors p est une fibration.

Soit à nouveau $p : X \rightarrow B$ un fibré principal de groupe structural F . Utilisant le fait que p satisfait à la condition de Kan, on montre facilement l'existence d'un **relèvement** $p : B \rightarrow X$ (c'est-à-dire, d'une suite d'application $\rho_n : B_n \rightarrow X_n$ telles que $p_n \rho =$ identité) qui est compatible avec tous les opérateurs s_i sans exception, et avec tous les opérateurs d_i pour $i > 1$. Soit.

$$\tilde{\rho} : F \times B \rightarrow X$$

l'application définie par $\tilde{\rho}(u, b) = u \cdot \rho(b)$.

Il est immédiat que $\tilde{\rho}$ est une bijection ; identifions X à $F \times B$ par cette bijection : alors les opérateurs s_i et d_i , sur $F \times B$, ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} S_i(x, y) &= (s x, x_i y) \text{ pour } i > 0 \ (x \in F_n, y \in B_n), \\ d_i(x, y) &= (d_i x, d_i y) \text{ pour } i > 1 \\ d_0(x, y) &= (d(x) \tau(y), d_0 y) \end{aligned} \quad (2)$$

où $\tau : B_n \rightarrow F_{n-1}$ est une application qui satisfait à certaines conditions. On les obtient en exprimant que les s et les d définis, par (2) satisfont aux relations (1) du 2-1. Il vient

$$\begin{aligned} \tau S_0 y &= \frac{1}{n} \quad \text{pour } y \in B_n \\ S_i \tau &= \tau_i + 1 \quad \text{pour } i > 0 \\ d_i \tau &= \tau d_i + 1 \quad \text{pour } i > 1 \\ (d_0 \tau y) (\tau d_0 y) &= \tau d_1 y \end{aligned} \quad (3)$$

Réciproquement, étant données des applications $\tau : B_n \rightarrow F_{n-1}$ satisfaisant à (3), définissons, sur le produit $F \times B$, des opérations S_i et d_i par les formules (2). Alors $F \times B$ est muni d'une structure d'ensemble simplicial dans lequel le groupe F opère à gauche par $u(X_1 y) = (ux, y)$ (pour $u, x \in F_n$ et $y \in B_n$). L'application $p : F \times B \rightarrow B$ définie par $p(x_1 y) = y$ identifie B au quotient de $F \times B$ par les opérations de F , et fait de $F \times B$ un fibré principal de groupe structural F . Pour éviter toute confusion, on notera $F \times B$ le produit muni des opérateurs S_i et d_i définis par (2) à partir de τ (τ satisfaisant à (3)). On dira que $F \times B$ est le **produit cartésien tordu** défini par τ .

Etant donnés deux fibrés principaux X et X' de même groupe F ; appelons morphisme de X dans X' toute application simpliciale $f : X \rightarrow X'$ qui commute aux opérations de G ; alors f induit une application simpliciale $f : B \rightarrow B'$ des bases $B = X/G$, $B' = X'/G$. Soit $g : B \rightarrow B'$ une application

simpliciale ; nous disons qu'un morphisme $f : X \rightarrow X'$ induisant est **compatible** avec les relèvements $\rho : B \rightarrow X$, $\rho' : B' \rightarrow X'$, si $\rho'g = f\rho$.

2) Modules simpliciaux sur une algèbre simpliciale

Désormais on prend comme anneau de base l'anneau Z des entiers; la généralisation au cas d'un anneau commutatif avec élément unité est facile.

Considérons la catégorie A des algèbres libres, unitaires, où les morphismes sont supposés unitaires. Une algèbre simpliciale est un foncteur contravariant de Δ dans A (voir section 1 de ce chapitre). Les morphismes sont les transformations naturelles de foncteurs à valeurs dans A .

Définition 2-2-1 : Soit Z l'algèbre simpliciale A telle que $A_q = Z$ pour toute dimension q , les applications de face $A_{q+1} \rightarrow A_q$ et les applications de dégénérescence $A_q \rightarrow A_{q+1}$ étant toutes égales à l'application identique de Z .

Une **augmentation** est un homomorphisme d'algèbres simpliciales $\epsilon : A \rightarrow \tilde{Z}$ tel que pour chaque dimension q , l'unité 1_q soit appliquée dans l'unité. Un tel ϵ est défini par l'homomorphisme d'algèbres $\epsilon_0 : A_0 \rightarrow Z$ parce que $\epsilon_n : A_n \rightarrow Z$ est nécessairement le composé $A_n \xrightarrow{(d_0)^n} A_0 \rightarrow Z$. De plus, on peut choisir pour ϵ_0 n'importe quel homomorphisme d'algèbre. ϵ_0 se prolonge dans un homomorphisme de groupe abélien simplicial (9). Puis $A_n \rightarrow Z$ étant le composé des homomorphismes d'algèbres, $(d_0)^n$ et ϵ_0 est un homomorphisme d'algèbre.

Une algèbre simpliciale est dite "augmentée" si l'on s'est donné une augmentation $\epsilon : A \rightarrow Z$.

Définition 2-2-2 : Etant donnée une algèbre simpliciale A , on dit qu'un groupe abélien simplicial M est un A -module si l'on s'est donné un homomorphisme π du groupe abélien simplicial $A \otimes \tilde{Z} M$ (où $(A \otimes \tilde{Z} M)_q = A_q \otimes_Z M_q$, $d_i(x \otimes y) = d_i x \otimes d_i y$, et $s_i(x \otimes y) = s_i x \otimes s_i y$.)

dans le groupe abélien simplicial M , de manière que

$$(1) \pi_q(1_q \otimes m_q) = m_q, \pi_q(a_q \otimes \pi_q(a'_q \otimes m_q)) = \pi_q(a_q a'_q \otimes m_q)$$

S'il n'y a pas de confusion possible, on écrira aussi $q \cdot m_q$ au lieu de $\pi_q(a_q \otimes m_q)$.

Si (M, π) et (M', π') sont deux A -modules, on appelle morphisme de M dans M' un homomorphisme simplicial $f : M \rightarrow M'$ tel que

$$f(\pi_q(a_q \otimes m_q)) = \pi'_q(a_q \otimes f(m_q)).$$

On définit ainsi la catégorie M des A -modules. Si $M', M'' \in M$ on définit la somme directe $M \oplus M' \in M$ comme suit : $(M' \oplus M'')_q = M'_q \oplus M''_q$ où $\pi :$

$A \otimes (M' \oplus M'') \rightarrow M' \oplus M''$ est défini par $\pi' \oplus \pi''$, $\pi' \pi''$ définissant la structure de A -module de M' , M'' . L'objet $O \in M$ est le A -module qui a l'élément neutre en chaque dimension. Soit K la classe de **tous** les morphismes. Il est classique que tous les morphismes de K sont propres en chaque dimension. Ce qui entraîne immédiatement que les morphismes sont propres. Il est maintenant facile de vérifier que M est une catégorie abélienne. En effet, considérons une suite exacte $(E) \ 0 \rightarrow B \rightarrow E \xrightarrow{\xi} A \rightarrow 0$ de A -modules et un morphisme $f : B \rightarrow B'$. Pour montrer qu'il existe un relèvement universel du coin $(B \rightarrow B', (E))_E 1$ il suffit de montrer l'existence d'un relèvement. En effet, le Lemme 1-3-1 étant vrai dans une catégorie de modules sur une algèbre unitaire est vrai dans M_K et alors son corollaire 1 est vrai. Considérons le diagramme commutatif dans la démonstration du théorème 1-4-1. Le dernier rand donne évidemment un relèvement à $(B \rightarrow B', (E))_E 1$. Considérons un cocoin $(A \xrightarrow{\alpha} A', (E))_E 1$. Soit (E, A') le sous-module de $E \oplus A'$, des couples (e, a') , $e \in E_q$, $a' \in A'_q$ tel que $\epsilon(e) = \alpha(a')$. Il est facile de voir que l'on a une suite exacte $0 \rightarrow B \rightarrow (E, A') \xrightarrow{\alpha} A' \rightarrow 0$ où α' est défini par la projection $P_A : E \oplus A \rightarrow A$.

Il est immédiat que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & (E, A') & \rightarrow & A' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow I_B & & \downarrow & & \downarrow \alpha \\ 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & E & \rightarrow & A \rightarrow 0 \end{array}$$

Ce qui montre que M est effectivement une catégorie abélienne.

Pour tout ensemble simplicial X et tout groupe abélien M , on notera $(C^n(X; M))$ le groupe abélien des applications $u : X_n \rightarrow M$ (n -cochaines de X à valeurs dans M). Considérons, en particulier, le cas où X est l'ensemble simplicial $\Delta_q^\sim$.

On définit $d_i : C^n(\Delta_{q+i}^\sim; M) \rightarrow C^n(\Delta_q^\sim; M)$ comme l'application transposée de δ_i et $S_i : C^n(\Delta_q^\sim; M) \rightarrow C^n(\Delta_{q+1}^\sim; M)$ comme l'application transposée de δ_i . Munie des opérateurs d_i et S_i la collection des $C^n(\Delta_q^\sim; M)$ (pour $q = 0, 1, \dots$) est un groupe abélien simplicial, qu'on notera $C^n(M)$.

On appelle **co-chaine fondamentale** l'élément $\xi \in \text{Hom}(C^n(M)_n, M)$ défini par $\tilde{\xi}(a) = a(\Delta_n)$. Si $b \in C^n(M)_q$, alors $\tilde{b}^*(\xi) = b$ (pour la définition de $\tilde{b} : \Delta_q^\sim \rightarrow C^n(M)$ voir la remarque après la définition de $\Delta_q^\sim$ au bas de la page 36. En effet, si $a \in (\Delta_q^\sim)_p$, $\tilde{a} : \Delta_p^\sim \rightarrow \Delta_q^\sim$, on a $\tilde{b}(a) = \tilde{a}^*(b) \in C^n(M)_p$: c'est la traduction du fait que $\tilde{b}$ est simplicial et qu'un morphisme $u : \Delta_p \rightarrow \Delta_q \in \Delta$ peut s'écrire comme la composition des δ_i et σ_i .

On a pour tout $a \in (\Delta_q^\sim)_n$, $(\tilde{b}^*(\xi))(a) = \xi(\tilde{b}(a)) = (\tilde{b}(a))(\Delta_n) = (\tilde{a}^*(b))(\Delta_n) = b(\tilde{a}(\Delta_n)) = b(a)$.

En s'inspirant d'un théorème classique d'Eilenberg-MacLane (10) on a la

Proposition 2-2-1 : Pour tout ensemble simplicial X et tout groupe abélien G , il existe un isomorphisme naturel φ du groupe $C^n(X; G)$ sur le groupe $\text{Hom}(X, C^n(G))$ des applications simpliciales de X dans $C^n(G)$ donné par $\varphi(\Phi)(X) = X^*(\gamma)$. Si de plus X est un groupe simplicial, les applications $u : x_n \rightarrow G$ qui correspondent aux homomorphismes simpliciaux $X \rightarrow C^n(G)$ par l'isomorphisme précédent sont précisément les homomorphismes du groupe abélien X_n dans le groupe abélien G .

Démonstration : Soit $\gamma \in C^n(X, G)$ et $a \in X_q$, posons $g(a) = \tilde{a}^*(\gamma)$. g est une application simpliciale de X dans $C^n(G)$. En effet, $g(d_i a) = (d_i a)^*(\gamma) = (\tilde{a} \circ \delta_i)^*(\gamma) = d_i(\tilde{a}^*(\gamma)) = d_i(g(a))$. Si $\gamma : X_n \rightarrow G$ est un homomorphisme, g est **unique**. En effet, $\tilde{a}^*(\xi) = \tilde{a}^*(g^*(\xi)) = (g_0 \tilde{a})^*(\xi) = g(\tilde{a})^*(\xi) = g(a)$.

Revenons à l'algèbre simpliciale A ; soit M la catégorie des A -modules simpliciaux, et soit M_n la catégorie des modules sur l'algèbre A_n . Soit alors M un objet de M_n en appliquant la proposition 2-4-1, on voit facilement que la structure de A_n -modules de M définit un homomorphisme.

$$A_n \otimes C^n(M)_n \rightarrow M (a \otimes f \rightarrow a f)$$

qui définit sur le groupe abélien simplicial $C^n(M)$ une structure de module simplicial sur A ; autrement dit $C^n(M)$ est un objet de M . Si $f : M^1 \rightarrow M^2 \in M_n$ voit $C^n(f) : C^n(M^1) \rightarrow C^n(M^2)$ donné par composition. Alors il est immédiat que C^n est un foncteur covariant de la catégorie M_n dans la catégorie M ; ce foncteur est additif et exact. Considérons le foncteur S_n de la catégorie M et dans la catégorie qui à chaque A -module associe le A_n -module M_n et à chaque morphisme $f : M \rightarrow M'$ S_n associe $f_n : M_n \rightarrow M'_n$. La proposition 2-2-1 définit une bijection naturelle.

$$\Phi : \text{Hom}_{M_n}(S_n(M), N) \rightarrow \text{Hom}_M(M, C^n(N)) \text{ pour } M \in M, N \in M_n$$

Donc S_n et C^n sont des "foncteurs adjoints". De plus Φ est un isomorphisme de groupes abéliens.

Proposition 2-2-2 : Si un objet $I \in M_n$ est injectif (voir 1-6), l'objet $C^n(I) \in M_K$ est injectif.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2-2-1.

Théorème 2-2-1 : Chaque objet de M peut se plonger dans un objet injectif.

Par un raisonnement analogue à celui d'Eilenberg-Cartan (7) on montre ceci : soit Γ un groupe simplicial ; soit $Z(r)$ l'algèbre de ce groupe, et $I(r)$ le noyau de l'augmentation-unité $\epsilon : Z(r) \rightarrow \tilde{Z}$. Alors, pour tout Γ -module simplicial C , l'ensemble $\text{Ext}_{\Gamma}^n(C, I(r))$ est en correspondance bijective naturelle avec les classes d'extensions de groupes simpliciaux

$$0 \rightarrow C \rightarrow X \rightarrow \Gamma \rightarrow 0$$

qui sont relatives à la structure donnée de Γ module de C .

Démonstration : Il y a un foncteur G_n de la catégorie des A_n -modules dans elle-même, et un monomorphisme $I_n(M)$ de M dans un module injectif $G_n(M)$ pour tout M . Soit alors M un A -module ; le produit

$$\prod_n C^n(G_n(S_n(M)))$$

est un objet injectif de la catégorie M_K , puisque c'est un produit d'injectifs ; les $I_n(S_n(M))$ induisent un monomorphisme de M dans $\prod_n C^n(G_n(S_n(M)))$, d'où le théorème.

Il résulte aussitôt de la proposition 2-2-1 que Φ définit des isomorphismes :

$$\text{Ext}^i M_n(S_n(M), N) \approx \text{Ext}^i M_n(M, C^n(N)), \text{ pour } M \in M, N \in M_n$$

Existence de projectifs.

Soit maintenant $A \otimes_{\mathbb{Z}}^{\sim} C(\Delta_n^{\sim})$ le A -module simplicial donné par la multiplication dans A (c'est-à-dire, $a \otimes (a' \otimes x) \rightarrow a a' \otimes x$). Nous avons comme dans le cas classique $\text{Hom}_M(A \otimes_{\mathbb{Z}}^{\sim} X, M) \approx \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, M)$. Ce qui implique la

Proposition 2-2-3 : Pour tout A -module simplicial X , il existe un isomorphisme naturel φ du groupe $\text{Hom}_M(A \otimes_{\mathbb{Z}}^{\sim} C(\Delta_n^{\sim}), X)$ sur le groupe X_q défini par $\varphi(f) = f(\Delta_q)$.

Nous avons comme conséquence immédiate de la proposition 2-4-3 que $A \otimes_{\mathbb{Z}}^{\sim} C(\Delta_q^{\sim})$ est projectif par rapport à la structure abélienne maximale de M .

Chaque objet de M peut s'exprimer comme le quotient d'un objet projectif. En effet, soit $M \in M_K$ et $m_n^i \in M_n$, $i \in I_n$, un système de générateurs de M_n . La somme $\sum_n \sum_{i \in I_n} I_n(A \otimes_{\mathbb{Z}}^{\sim} C(\Delta_n^{\sim}))^{i_1}$ est un objet projectif de M_K .

L'homomorphisme $H :: \sum_n \sum_{i \in I_n} I_n(A \otimes_{\mathbb{Z}}^{\sim} C(\Delta_n^{\sim}))^{i_1} \rightarrow M$ qui implique $(1 \otimes \Delta_n)^{i_1}$ dans m_n^i définit un épimorphisme.

Le foncteur $M : z \rightarrow G$ de Moore est une équivalence (2-1), et par conséquent, pour tout objet $X \in z$, il existe un isomorphisme naturel du groupe $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, K(\pi, n))$ (où $K(\pi, n)$ est le groupe simplicial minimal tel que $\pi_1(K(\pi, n)) = 0$, $i \neq n$ et $\pi_n(K(\pi, n)) = \pi$) sur le groupe $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M(X)_n / \partial_{n+1} M(X)_{n+1}, \pi)$.

Si nous écrivons $F(X) = M(X)_n / \partial_{n+1} M(X)_{n+1}$ et $G(Y) = \text{Hom}(Y, \pi)$ nous avons le

Proposition 2-2-4 : Il existe un foncteur spectral sur z à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens, aboutissant à $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^i(X, K(\pi, n))$ et dont

$EP_2^q(X)$ est $Ext_Z^P(H_{n+q}(X)), \pi), q > 0, EP_2^0(X) = Ext_Z^P(M(X)_n / \partial_{n+1} M(X)_{n+1}, \pi)$.

Démonstration : Cartan-Eilenberg (7, page 57) démontre pour $i > 0$ que $SqF = H_{n+q}(X)$ pour $q < 0$. Si $\Delta^\sim$ est égal à une somme de $C(\Delta^\sim_q)$, nous avons $Ext_Z^i(F(\Delta), \pi) = 0$. En appliquant la section 7 du chapitre 1, nous trouvons la proposition 2-2-4.

Nous disons qu'un objet $M \in M$ a une A-structure triviale si l'opération de A sur M est telle que $\pi(a, m) = \pm \epsilon(a) \cdot m$ où $\epsilon : A \rightarrow \tilde{Z}$ est l'augmentation.

Proposition 2-2-5 : Si $\epsilon_0 : A_0 \rightarrow Z$ est un isomorphisme, $K(\pi, n)$ a une A-structure triviale.

Démonstration : il suffit de montrer que $K(\pi, n)_n$ est A_n -trivial, le foncteur de Moore, $M : z \rightarrow \partial G$, étant une équivalence et $M(K(\pi, n))$ étant égale à (π, n) (c'est-à-dire, le groupe différentiel gradué ayant π en dimension n et zéro ailleurs). Soit, maintenant, $x \in A_n$ et $y \in K(\pi, n)_n$, $\partial_0(s_0 x s_1 y) = xy$, et $d_2(s_0 d_1(x) y)$, et $d_1(s_0 x s_1 y) = 0$ pour $i > 2$. Ce qui montre en se servant de la minimalité de $K(\pi, n)$ que $xy = s_0 d_1(x) y$. Supposons que nous ayons $z = xy = s_{m-1} s_{m-2} \dots s_0 d_1 \dots d_1(X) y$, $m < n$. Alors si

m. fois
 $g = (s_m s_{m-1} \dots s_0 d_1 \dots d_1(x) s_{m+1}(y))$; nous avons $d_i(g) = 0$ pour i
 m. fois
 $\neq m+1, m+2$ et $d_{m+1}(g) = Z$ et $d_{m+2}(g) = s_m s_{m-1} \dots s_0 d_1 \dots d_1(x)$,
 m+1 fois

y . Ce qui montre par récurrence que $x \cdot y = s_{n-1} s_{n-2} \dots s_0 d_1 \dots d_1(x) \cdot y$.
 n-fois

Puisque $s_{n-1} s_{n-2} \dots s_0 d_1 \dots d_1(x) = \epsilon(x)$, la proposition est démontrée.
 n-fois

De cette proposition on déduit immédiatement que $Hom M(X, K(\pi, n)) \approx Hom_Z(X \otimes_A \tilde{Z}, K(\pi, n))$ A opérant trivialement sur Z où $A_0 = Z$. On pose $P(X) = X \otimes_A \tilde{Z}$. Nous avons : $Hom_M(X, K(\pi, n)) \approx Hom_Z(P(X), K(\pi, n))$. Soit $\Delta_A^\sim$ une somme directe de A-modules, $T = \sum_{i \in I} (A \otimes_Z \Delta_Z \Delta_{q_i})$ où i est un ensemble d'indices. Nous avons $P(\Delta_A^\sim) = \Delta^\sim = \sum_{i \in I} \Delta_{q_i}$. Ce qui entraîne $Ext_Z^i(P(\Delta_A^\sim), K(\pi, n)) = 0$ pour $i > 0$. Alors nous avons (voir chapitre 1, Section 7).

Proposition 2-2-6 : Il existe une suite spectrale aboutissant à $Ext_M^n(K(\pi, n))$ et dont $EP_2^q(X)$ est $Ext_Z^P(L_{-q} P(X), K(\pi, n))$ où $A_0 = Z, q > 0$. Par un raisonnement classique de suite spectrale on trouve la suite exacte

$$(7) \quad 0 \rightarrow Ext_Z^1(x \otimes_A \tilde{Z}, K(\pi, n)) \rightarrow Ext_M^1(X, K(\pi, n)) \rightarrow Hom_Z(L_1 P(X), K(\pi, n)) \\ \rightarrow Ext_Z^2(X \otimes_A \tilde{Z}, K(\pi, n)) \rightarrow Ext_M^2(X, K(\pi, n))$$

Une structure relative dans M (catégorie des A -modules simpliciaux).

Définition 2-2-3 : Un homomorphisme $P: G^1 \rightarrow G^2$ (où G^1 et G^2 sont des groupes abéliens simpliciaux) est dit pseudo-simplicial si ρ conserve les degrés, et $\rho s_i = s_i \rho$, $\rho d_{i+1} = d_{i+1} \rho$ (mais non nécessairement $\rho d_0 = d_0 \rho$).

Soit K une classe admissible (voir chapitre 1, section 1) de morphismes dans M où un K -épimorphisme est un épimorphisme qui admet un relèvement pseudo-simplicial.

Ce choix de morphismes propres dans M définit une structure abélienne. En effet, considérons un relèvement $O \rightarrow F^1 \rightarrow F^2 \rightarrow E^3 \rightarrow O$ du coin $(E^1 \rightarrow F^1, O \rightarrow E^1 \rightarrow E^2 \rightarrow E^3)_{E^1}$. Nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} O & \rightarrow & E^1 & \xrightarrow{\eta^1} & E^2 & \xrightarrow{\eta^2} & E^3 \rightarrow O \\ & & \downarrow \epsilon^1 & & \downarrow \epsilon^2 & & \downarrow \epsilon^3 \\ O & \rightarrow & F^1 & \xrightarrow{\varphi^1} & F^2 & \xrightarrow{\varphi^2} & F^3 \rightarrow O \end{array}$$

Soit $\rho^2 : E^3 \rightarrow E$ le relèvement pseudo-simplicial de η^2 (c'est-à-dire, $\eta^2 \circ \rho^2 = I_{E^3}$). Nous avons que $\epsilon^2 \circ \rho^2 : E^3 \rightarrow F^2$ est un relèvement pseudo-simplicial de φ^2 . De même considérons un cocoin $(E^3 \xrightarrow{\epsilon^3} F^3, O \xrightarrow{\epsilon^1} E^1 \rightarrow E^2 \rightarrow E^3 \rightarrow O)$ et le relèvement universel donné (p. 50). Soit $\rho^3 : F^3 \rightarrow (F^3, E^3)$ l'application pseudo-simpliciale donnée par $\rho^3(x) = (x, \rho^2(\epsilon^3(x)))$.

Ce qui montre (i) de la définition d'une catégorie avec A -structure abélienne (voir 1-3). La démonstration de (ii) de la définition d'une catégorie avec K -structure abélienne est immédiate. Nous notons $M_K(A)$ la sous-catégorie de M , avec structure abélienne donnée par la classe K des morphismes propres.

Proposition 2-2-7 : Si l'épimorphisme simplicial $f : X \rightarrow Y$, X et Y étant des groupes abéliens simpliciaux, possède un relèvement pseudo-simplicial $\rho : Y \rightarrow X$, et si en outre Y possède un endomorphisme S (augmentant les degrés de 1) tel que

$$(1) \quad \begin{aligned} Ss_i &= S_{i+1} S, \quad d_0 S = \text{identité} \\ Sd_i &= d_{i+1} S \text{ sur les éléments de degré } > 0 \end{aligned}$$

alors f possède un relèvement simplicial.

Démonstration : (1) entraîne que

$$(2) \quad \begin{aligned} \partial S + S \partial &= \text{identité sur les degrés } > 0 \text{ où } \partial = \\ &\sum (-1)^i d_i : X_n \rightarrow X_{n-1} \quad (Y_n \rightarrow Y_{n-1}) \end{aligned}$$

Définissons $g : Y \rightarrow X$ comme suit :

$$\begin{aligned} g &= \partial \rho S + \rho d_1 S \quad \text{sur le degré } 0, \\ g &= \partial \rho S + \rho S \partial \quad \text{sur les degrés } > 0 \end{aligned}$$

g relève f. En effet, sur le degré 0, on a $fg = f\partial\rho S + f\partial d_1 S = \partial f\rho S + d_1 S = \partial_0 S + d_1 S = d_0 S = \text{identité}$, et sur les degrés > 0 , on a

$$fg = f\partial\rho S + f\rho S\partial' = \partial f\rho S + f\rho Sd = \partial S + S\partial = \partial S + S\partial = \text{identité}$$

g commute avec ∂ . En effet, sur le degré 1, on a $g\partial - \partial g = \partial\rho S\partial + \rho d_1 S\partial - \partial\rho S\partial = \rho d_1 Sd_0 - \rho d_1 Sd_1 = \rho (d_1 d_1 - d_1 d_2) S = 0$

Et sur les degrés > 1 , on a

$$g\partial - \partial g = \partial\rho S\partial - \partial\rho S\partial = 0$$

g transforme tout élément dégénéré en un dégénéré

$$\text{En effet, on a } gS_i = \partial\rho Ss_i + \rho S\partial s_i = \partial s_{i+1} \rho S + \rho S\partial S_i$$

∂S_{i+1} et ∂S_i transforment tout élément en un dégénéré, et d'autre part ρS transforme tout dégénéré en dégénéré. D'où l'assertion.

Par passage aux quotients, g induit une application $h : N(X) \rightarrow N(Y)$

compatible avec ∂ , et telle que $fh = \text{identité}$ sur $N(X)$. Ici, $N(X) = X/D(X)$ est le quotient par le sous-groupe des dégénérés, qui est stable par ∂ . Mais on sait (8) que $N(X)$ s'identifie aussi à $M(X)$ où $M(X)_n$ est le sous-groupe formé des $X \in X_n$ tels que $d_i x = 0$, pour $i > 0$; l'opérateur différentiel de $N(X)$ étant alors d_0 . On notera que si on considère $N(X)$ et $N(Y)$ comme des sous-groupes de X et de Y , L'application f envoie $N(Y)$ dans $N(X)$ (sans qu'il soit nécessaire de passer au quotient, comme on l'a fait pour g afin d'obtenir h).

On sait (9) que l'application h se prolonge d'une seule manière en une application **simpliciale** (encore notée h) de X dans Y . Montrons qu'ainsi prolongée, **h relève f**. Il suffit de voir que $fh(x) = x$ pour tout élément de la forme $S_j(x')$, avec $x' \in N(X)$. On sait déjà que $fh(x') = x'$.

On a

$$fh S_j(x') = f S_j h(x') = S_j f h(x') = S_j(x') \quad \text{C.Q.E.D.}$$

Définition 2-2-4 : L'espace des chemins d'un groupe abélien simplicial G est le groupe abélien simplicial $G^\#$ tel qu'il existe une bijection $\lambda : G_n^\# \rightarrow G_{n+1}$ pour tout n assujettie aux conditions $\lambda d_i = d_{i+1} \lambda$, $\lambda S_i = S_{i+1} \lambda$. On définit l'application simpliciale $d_0 \lambda : G_n^\# \rightarrow G_n$, qui possède un relèvement pseudo-simplicial $\lambda^{-1} S_0 : G_n \rightarrow G_n^\#$.

Théorème 2-2-2 : Pour chaque objet $M \in M_K$ il existe un épimorphisme propre $f : P \rightarrow M$ où P est projectif dans M_K .

Démonstration : On voit aussitôt que $A \otimes_{\mathbb{Z}} M,^\#$ avec structure de A -module donnée par la multiplication dans A , est projectif dans M_K d : $A \otimes_{\mathbb{Z}} M^\# \rightarrow M$ défini comme suit $d(a, m) = a \cdot d_0 \lambda(m)$, est un épimorphisme propre.

Soit $P(X) = Z \otimes_A X$. Si $X = A \otimes_Z M^\#$, $P(X) = M^\#$. Ce qui implique $\text{Ext}_{ZK}^i(P(A \otimes_Z M^\#), K(\pi, n)) = 0$ pour $i > 0$. En suivant le raisonnement de la proposition 2-2-6, nous trouvons une suite spectrale $E^{p,q}$, $p > 0$, $q > 0$, aboutissant au $\text{Ext}_n^M(X, K(\pi, n))$ ayant $E_2^{p,q}(X)$ égale à $(\text{Ext}_{3Z}^p(L^{-q}(P(X), K(\pi, n))))$.

CHAPITRE III

L'existence des groupes simpliciaux minimaux

1) Le fibré universel et le classifiant d'un groupe Γ .

Définition 3-1-3 : Soit Γ un groupe simplicial. Un produit cartésien tordu $\Gamma \times_{\tau} B$ est de type (W) où B_0 se réduit à un seul sommet et où Γ est un groupe abélien si $d_0 : e_{q+1} \times B_{q+1} \rightarrow (\Gamma \times_{\tau} B)_q$ est bijectif. Nous avons (5) les théorèmes suivants :

Théorème : Soient $\Gamma \times_{\tau} B$ et $\Gamma' \times_{\tau'} B'$ des produits cartésiens tordus, le deuxième étant du type (W) , et soit $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$, un homomorphisme simplicial ; alors il existe une application et une seule de $\Gamma \times_{\tau} B$ dans $\Gamma' \times_{\tau'} B'$, compatible avec f et les fonctions tordantes τ et τ' .

Corollaire : Si $\Gamma \times_{\tau} B$ et $\Gamma \times_{\tau} 1B^1$ sont des produits cartésiens tordus de type (W) , il existe un unique isomorphisme $\varphi : \Gamma \times_{\tau} B \rightarrow \Gamma \times_{\tau} 1B^1$ compatible avec l'identité $i : \Gamma \rightarrow \Gamma$ et les fonctions tordantes.

Théorème 3-1-1 : Si Γ est un groupe simplicial, il existe un produit cartésien tordu $\Gamma \times_{\tau} W(\Gamma) = W(\Gamma)$ de type (W) .

En fait, on explicite $W(G)$ comme suit : au point de vue ensembliste,

$$W_n(G) = G_n \times G_{n-1} \times \dots \times G_0 = G_n \times W_n(G),$$

avec $W_n(G) = G_{n-1} \times \dots \times G_0$ pour $n > 1$, $W_0(G) = \{b_0\}$ $\rho : W_n(G) \rightarrow W_n(G)$ est l'application $b \rightarrow (1_n, b)$. On notera ρ la projection de $W_n(G) = G_n \times W_n(G)$ sur son second facteur $W_n(G)$. Pour éviter des confusions, notons λ la bijection $W_{n+1}(G) \rightarrow W_n(G)$. Alors τ est l'application composée de $\lambda : W_{n+1}(G) \rightarrow W_n(G)$ et de la projection de $W_n(G) = G_n \times W_n(G)$ sur son premier facteur G_n . Si on connaît déjà les opérateurs d_i et s_i sur $W_n(G)$, on en déduit d_i et s_i sur $W_n(G)$ en posant, pour $x \in G_n, y \in W_n(G)$:

$$d_0(x, y) = ((d_0 x) (\tau y), d_0 y)$$

$$d_{i+1}(x, y) = (d_{i+1} x, d_{i+1} y)$$

$$s_i(x, y) = (s_i x, s_i y)$$

Une fois connus les d_i et les s_i sur $W_n(G)$, on les définit sur $W_{n+1}(G)$ par les formules

$$d_0 = \rho \lambda \quad (n > 2)$$

$$\lambda d_{i+1} = d_i \lambda \quad (n > 2)$$

$$\lambda s_0 = \rho \quad (n > 0)$$

$$\lambda s_{i+1} = s_i \lambda \quad (n > 1)$$

Nous avons (31)

Théorème 3-1-2 : Soit Γ un groupe simplicial, connexe. Alors

(1) Si Γ est minimal, $\Gamma x_\tau W(\Gamma) \rightarrow W(\Gamma)$ est une fibration minimale,

(2) $W(\Gamma)$ et $W(\Gamma)$ satisfont à la condition de Kan et $W(\Gamma)$ est acyclique (i.e., $\pi_q(W(\Gamma)) = 0$ pour tout q) ; et

(3) si Γ est abélien, il y a une application simpliciale unique $\varphi: (\Gamma x_\tau \Gamma) x_\tau x_\tau (W(\Gamma) x W(\Gamma)) \rightarrow \Gamma x_\tau W(\Gamma) = W(\Gamma)$ compatible avec la multiplication $\Gamma x_\tau \Gamma \rightarrow \Gamma$, et cette application fait de $W(\Gamma)$ et $W(\Gamma)$ des groupes abéliens simpliciaux.

Définition 3-1-2 : Si Γ est un groupe abélien simplicial, soit $W(\Gamma)^0 = \Gamma$, $W(\Gamma)^1 = W(\Gamma)$, et $W(\Gamma)^{n+1} = W(W(\Gamma))^n$

Définition 3-1-3 : Si π est un groupe simplicial, soit $K(\pi, 0)$ le groupe simplicial tel que $K(\pi, 0) = \pi$, $S_i: K(\pi, 0)_n \rightarrow K(\pi, 0)_{n+1}$ et $d_i: K(\pi, 0)_i \rightarrow K(\pi, 0)_{i-1}$ étant des isomorphismes.

Théorème 3-1-3 : Si π est abélien, $W(K(\pi, 0))^n = K(\pi, n)$.

Définition 3-1-3 : Soient F un groupe simplicial, $f: X \rightarrow B$ une application simpliciale, et $E = Fx_\tau B$ un produit cartésien tordu. Définissons $E_f = Ex_\tau X$ comme le produit cartésien tordu donné par $\tau = \tau f: X \rightarrow F$. E_f est appelé le produit cartésien tordu induit par $f: X \rightarrow B$.

2) Théorie de Postnikov (31)

Définition 3-2-1 : Soit X un ensemble simplicial. Définissons un nouvel ensemble simplicial $X^{(n)}$ (31) comme suit :

(1) un $X \in X_q^{(n)}$ est une classe d'équivalence de simplexes de X_q , où deux simplexes $y, y' \in X_q$ sont équivalents si et seulement si $d_{i_1} \dots d_{i_{q-n}} y = y'$ pour toute suite $0 < i_1 < \dots < i_{q-n} < q$;

(2) les opérations de face et de dégénérescence de $X^{(n)}$ sont induites par ceux de X .

Posons $X^{(\infty)} = X$, et soit $P_K^n: X^{(n)} \rightarrow X^{(k)}$

la projection naturelle pour $n > k$.

Quand cela ne prête pas à confusion, nous désignerons p_K^n par p .

Théorème 3-2-1 : Soit X un ensemble simplicial satisfaisant à la condition de Kan. Alors :

- (1) $X^{(n)}$ est un complexe de Kan pour tout n ;
 et (2) $p: X^{(n)} \rightarrow X^{(k)}$ est une fibration pour $n > k$
 et (3) si $x \in X_0$, alors $\pi_q(X^{(n)}, x) = 0$ pour $q > n$
 $p^\#: \pi_q(X^{(n)}, x) \rightarrow \pi_q(X^{(k)}, x)$
 pour $q < k$.

Pour la démonstration du théorème précédent voir (31).

Définition 3-2-2 : Soit X un complexe de Kan, et $x \in X_0$. Soit $E_n(X, x)$ la fibre au-dessus de x par rapport à $p : X \rightarrow X^{(n-1)}$. L'ensemble simplicial $E_n(X, x)$ est le n -ième sous-complexe d'Eilenberg de X au-dessus de x .

Proposition 3-2-1 : Soit X un complexe de Kan avec $x \in X_0$. Nous avons

$$(1) \pi_q(E_n(X, x), x) = 0 \text{ pour } q < n, \text{ et}$$

(2) $i^\# : \pi_q(E_n(X, x), x) \xrightarrow{\sim} \pi_q(X, x)$ pour $q > n$, où $i : E_n(X, x) \rightarrow X$ est l'injection.

Définition 3-2-3 : Si X est un complexe de Kan, soit N^n la fibration $p : X^{(n+1)} \rightarrow X^{(n)}$. La suite de fibration $X = (X^0, X^1, \dots, X^n, \dots)$ est par définition le système de Postnikov de X .

De la suite exacte d'homotopie on déduit immédiatement :

Théorème 3-2-2 : La fibre $F^{(n+1)}$ de la fibration $p : X^{(n+1)} \rightarrow X^{(n)}$ est un complexe d'Eilenberg-MacLane de type $(\pi_{n+1}(X, x), n+1)$; ie : $\pi_q(F^{(n+1)}, f) = 0$ $q \neq n+1$, et $\pi_{n+1}(F^{(n+1)}, f) = \pi_{n+1}(X, x)$ où $f \in F$.

Définition 3-2-4 : Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration, $e \in E_0$, $b = p(e)$ et F la fibre sur b . Supposons que B et F soient connexes et que B et E soient des complexes de Kan. Définissons un nouvel ensemble simplicial $E^{(n)}$ comme suit :

(1) un simplexe $x \in E_q^{(n)}$ est une classe d'équivalence de simplexe de E_q , où $x, x' \in E_q$ sont équivalents si et seulement si

$$(i) p(x) = p(x'), \text{ et}$$

$$(ii) d_{i_1} \dots d_{i_{q-n}} x = d_{i_1} \dots d_{i_{q-n}} x' \text{ pour toute suite } 0 < i_1 \dots < i_{q-n} < q$$

(2) les opérateurs de face et de dégénérescence dans $E^{(n)}$ sont induites par celles de E .

Posons $E^{(\infty)} = E$, et soit $p_{n,k}^E : E^{(n)} \rightarrow E^{(k)}$ l'application naturelle pour $n > k$, où $\infty < k$, donne le théorème suivant :

Théorème 3-2-3 : Soient $p : E \rightarrow B$ une fibration, $e \in E_0$, $b = p(e)$ et F la fibre au-dessus de b . Alors

(1) $E^{(n)}$ satisfait à la condition de Kan,

(2) $E^{(0)} = B$ si $E_0 = \{e\}$;

(3) $p : E^{(n)} \rightarrow E^{(k)}$ est une fibration pour $n > k$;

(4) $p^\# : \pi_q(E, e) \xrightarrow{\sim} \pi_q(E^{(n)}, e)$ pour $q < n$;

(5) $p^\# : \pi_q(E^{(n)}, e) \xrightarrow{\sim} \pi_q(B, b)$ pour $q > n+1$; et

(6) la fibre de $p : E^{(n)} \rightarrow B$ est $F^{(n)}$, le n -ième terme dans le système de Postnikov pour la fibre F .

Définition 3-2-5 : Soient $p : E \rightarrow B$ une fibration, où B et E sont connexes, et ϵ^n la fibration $p : E^{(n+1)} \rightarrow E^{(n)}$. La suite $\epsilon = (\epsilon^0, \epsilon^1, \dots, \epsilon^n, \dots)$ est par définition le système de Postnikov de $p : E \rightarrow B$.

Théorème 3-2-4 : Si $p : E \rightarrow B$ est une fibration, où E et B sont connexes, alors la fibre au-dessus de $e \in E_0$, $b = p(e)$, et F la fibre au-dessus de $b/$ dans la fibration ϵ^n est un ensemble simplicial de type $X(\pi_{n+1}(F, e), n+1)$.

Nous avons le théorème bien connu d'Eilenberg-MacLane (11)

Théorème 3-2-5 : Soit X un ensemble simplicial. Pour toute application simpliciale $f : X \rightarrow W(K_i(\pi, n))$, soit f la n -cochaîne "normalisée", (i.e nulle sur les dégénérés), de X qui est définie par f/X_n .

Alors (1) la correspondance $f \rightarrow f$ est biunivoque,

(2) $f : X \rightarrow K(\pi, n)$ si et seulement si $f \in Z_N^n(X; \pi)$ où $Z_N^n(X; \pi)$ dénote les cocycles "normalisés" (voir chapitre II, section 1, p. 30).

(3) La correspondance induit un isomorphisme naturel entre les classes d'homotopie d'applications simpliciales $X \rightarrow K(\pi, n)$ et $H^n(X, \pi)$.

Théorème 3-2-6 : Soient X un ensemble simplicial minimal, connexe, $\pi_n = \pi_n(X)$, et k^{n+2} un cocycle qui représente l'obstruction à un relèvement de la fibration $p : X^{(n+1)} \rightarrow X^{(n)}$.

Alors (1) $X^{(1)} = W(K(\pi_0, 0))$ et

(2) Si $f^{(n+2)} : X^{(n)} \rightarrow K(\pi_{n+1}, n+2)$ est une application simpliciale qui correspond à k^{n+2} , il y a un isomorphisme entre $X^{(n+1)}$ et le produit tordu $W_{f^{n+2}}$ induit par f^{n+2} dans la base du produit cartésien tordu $W(K(\pi, n) = K(\pi, n) \times_{\tau} W(K(\pi, n))$ et cet isomorphisme fait de la fibration $p : X^{(n+1)} \rightarrow X^{(n)}$ un produit cartésien tordu $X^{n+1} = K(\pi_n, n) \times_{\tau} X^n$.

(2) $t : X \rightarrow K(\pi, n)$ si et seulement si $f \in Z_N^n(X, \pi)$ où $Z_N^n(x; \pi)$ dénote les cocycles "normalisés" (voir 2-1, p. 30).

(3) la correspondance induit un isomorphisme naturel entre les classes d'homotopie d'applications simpliciales $X \rightarrow K(\pi, n)$ et $H^n(x, \pi)$.

Théorème 3-2-2 : Soient X un ensemble simplicial minimal, connexe, $\pi_n = \pi_n(X)$ et k^{n+2} un cocycle qui représente l'obstruction à un relèvement de la fibration $p : X^{(n+1)} \rightarrow X^{(n)}$

Alors (1) $X^{(1)} = W(K(\pi_0, 0))$ et

(2) Si $f^{(n+2)} : X^{(n)} \rightarrow K(\pi_{n+1}, n+2)$ est une application simpliciale qui correspond à k^{n+2} , il y a un isomorphisme entre $X^{(n+1)}$ et le produit tordu $W_{f^{n+2}}$ induit par f^{n+2} dans la base du produit cartésien tordu $W(K(\pi, n) = K(\pi, n) \times_{\tau} W(K(\pi, n))$ et cet isomorphisme fait de la fibration $p : X^{(n+1)} \rightarrow X^{(n)}$ un produit cartésien tordu $X^{n+1} = K(\pi_n, n) \times_{\tau} X^n$.

Nous disons qu'un ensemble simplicial de Kan est de type n s'il y a au plus n groupes d'homotopie non-nuls.

Lemme 3-2-1 : Soit X un ensemble simplicial minimal, connexe tel qu'il n'y ait qu'un nombre fini de groupes d'homotopie non-nuls et tel que $\pi_i(X)$ soit fini pour tout i avec $\pi_1(X)$ abélien. Alors $X = \pi_1 X_{p_j}$ où p_j est un nombre premier et X_{p_j} est un ensemble simplicial minimal tel que ses groupes d'homotopie soient tous p_j premiers.

Démonstration : Ecrivons $\pi_i(X) = \sum \pi_i^{p_j}(X)$, où $\pi_i^{p_j}(X)$ est la p_j -composante de $\pi_i(X)$. Si X est de type 1, le lemme est évident. Supposons que le lemme soit démontré pour les ensembles simpliciaux minimaux de type n et supposons que X soit de type $n+1$. Soit $\pi_q(X)$ le dernier groupe d'homotopie non-nul. Nous avons une fibration principale $p : X^{(q)} \rightarrow X^{(q-1)}$ de fibre $K(\pi_q(X), q)$ où $X^{(q-1)}$ est de type n . Ecrivons $X^{(q-1)} = \pi_j X_{p_j}^{(q-1)}$ et $K(\pi_q(X), q) = \sum_j K(\pi_q^{p_j}(X), q)$. La démonstration qu'il existe un isomorphisme canonique entre $H^{q+1}(X^{(q-1)}; \pi_q(X))$ et $\sum_j H^{q+1}(X_{p_j}^{q+1}; \pi_q^{p_j}(X))$ est directe (voir 32). Si $\xi \in H^{q+1}(X^{(q-1)}; \pi_q(X))$ est la classe caractéristique d'une fibration principale $p : Y \rightarrow X^{q-1}$ de fibre $K(\pi_q(X), q)$, sa projection canonique dans $H_{p_j}^{q+1}(X^{q-1}; \pi_q^{p_j}(X))$ détermine une fibration principale $p_j : Y_{p_j} \rightarrow X_{p_j}^{q-1}$ de fibre $K(\pi_q^{p_j}(X), q)$. Il suffit alors de démontrer que la classe caractéristique de la fibration $\pi_j p_j : \pi_j Y_{p_j} \rightarrow \pi_j X_{p_j}^{q-1}$ n'est autre que $\xi \in H^{q+1}(X^{(q-1)}; \pi_q(X))$. Ce qui est immédiat.

3) Sur l'existence des groupes simpliciaux minimaux.

Notations : Si X est un groupe abélien simplicial, $C^n(X; \pi)$ désigne le groupe des homomorphismes de groupes abéliens $X_n \rightarrow \pi$; $Z^n(X; \pi)$, $B^n(X; \pi)$, et $H^n(X; \pi) = Z^n(X; \pi) / B^n(X; \pi)$ sont définis à partir de $C^n(X; \pi)$ comme dans le cas classique.*

Soit π un groupe abélien. Considérons la classe K_1 des extensions de $Z(\Gamma)$ -modules.

$$(X) \quad 0 \rightarrow K(\pi, n) \xrightarrow{\eta_1} X \xrightarrow{\eta_2} I(\Gamma) \rightarrow 0$$

où Γ est un groupe simplicial $I(\Gamma)$ le noyau de l'augmentation $\epsilon : Z(\Gamma) \rightarrow \tilde{Z}$, avec $Z(\Gamma)$ opérant canoniquement sur $I(\Gamma)^*$ et trivialement sur $K(\pi, n)$ (voir p. 46). Il n'est pas difficile de voir que cette suite exacte est dans $M_K(Z(\Gamma))$. Soient K_2 la classe des extensions d'algèbres augmentées (voir (7))

* où le cobord $\delta^n = \text{Hom}_Z(\sum (-1)^i d_i, \pi) : \text{Hom}_Z(X_n, \pi) \rightarrow \text{Hom}_Z(X_{n+1}, \pi)$

* i.e., $\pi : Z(\Gamma) \otimes_Z I(\Gamma) \rightarrow (\Gamma)$ est donné par $x \otimes y \rightarrow$ pour $x \in \Gamma_n, y \in I(\Gamma)_n$

$$(A) \quad 0 \rightarrow K(\pi, n) \xrightarrow{\tilde{\eta}_1} A \xrightarrow{\tilde{\eta}_2} Z(\Gamma) \rightarrow 0$$

et K_3 la classe des extensions (centrales) de groupes

$$(Y) \quad 0 \rightarrow K(\pi, n) \xrightarrow{\tilde{\eta}_1} Y \xrightarrow{\tilde{\eta}_2} \Gamma \rightarrow e \quad (Y \text{ connexe})$$

Soit $\Psi_1 : K_1 \rightarrow K_2$ une fonction définie comme suit : $\Psi_1(X)$ est la suite exacte

$$0 \rightarrow K(\pi_1, n) \xrightarrow{\Psi_1(\eta_1)} A \xrightarrow{\Psi_1(\eta_1)} Z(\Gamma) \rightarrow 0$$

où $A = X \oplus \tilde{Z}$ est muni de la multiplication

$$(X_1, Z_1)(X_2, Z_2) = \pi(1 \eta_2(X_1)_1 X_2) + Z_1 X_2 + Z_2 X_1, Z_1 Z_2$$

et où $\pi : Z(\Gamma) \otimes_{\tilde{Z}} X \rightarrow X$ est l'homomorphisme définissant la structure de $Z(\Gamma)$ -modules sur X ; $i : I(\Gamma) \rightarrow Z(\Gamma)$ est l'injection ; $\Psi_2(\eta_1)$ est le composé de η_1 et de l'injection naturelle $X \rightarrow X \oplus \tilde{Z}$. $\Psi_1(\eta_2)$ est égal à η_2 sur X et à l'identité sur $\tilde{Z}$.

On définit $\Psi_2 : K_2 \rightarrow K_3$ comme suit : $\Psi_2(A)$ est la suite exacte

$$0 \rightarrow K(\pi, n) \xrightarrow{\Psi_2(\tilde{\eta}_1)} Y \xrightarrow{\Psi_2(\tilde{\eta}_2)} \Gamma \rightarrow e$$

où

$$Y = \tilde{\eta}_2(\Gamma), \Psi_2(\tilde{\eta}_2) = \tilde{\eta}_2|_Y \text{ et } \Psi_2(\eta_1)(X) = \tilde{\eta}_1(X) + 1$$

On pose $\Psi = \Psi_2 \circ \Psi_1$; associons à la classe d'extensions équivalentes à X la classe caractéristique de la classe d'extensions équivalentes à $\Psi(X)$; on obtient ainsi une application ensembliste $\Phi : \text{Ext}_{MK(Z(\Gamma))}(I(\Gamma), K(\pi, n)) \rightarrow (Z(\Gamma) ; \pi)$. ($\text{Ext}_{MK(Z(\Gamma))}^n$ désigne ici les $\text{Ext}_{MK(Z(\Gamma))}^n$ définis par rapport à la structure abélienne relative étudiée dans 2-4, p. 48). Par ailleurs la composée γ des transformations naturelles

$$\text{Hom}_{Z(\Gamma)}(X, K(\pi_1, n)) \xrightarrow{\gamma_1} \text{Hom}_Z(X, K(\pi, n)) \xrightarrow{\gamma_2} Z^n(X ; \pi)$$

définit par la Proposition 1-6-3 un homomorphisme

$$\Phi : \text{Ext}_{MK(Z(\Gamma))}^1(I(\Gamma), K(\pi, n)) \rightarrow H^{n+1}(I(\Gamma) ; \pi)$$

Lemme 3-3-1 : on a $i_* \Phi(\xi) = \Phi(\xi)$ où $i : I(\Gamma) \rightarrow Z(\Gamma)$ est l'injection.

Démonstration : Soit

$$(X) \quad 0 \rightarrow \Gamma(\pi, n) \xrightarrow{\eta_1} X \xrightarrow{\eta_2} I(\Gamma) \rightarrow 0$$

une extension de la classe $\xi \in \text{Ext}_{MK(Z(\Gamma))}^1(I(\Gamma), K(\pi, n))$

De la Proposition 1-6-3 nous tirons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_M(K(\pi, n), K(\pi, n)) & \xrightarrow{\delta_x} & \text{Ext}_{M_{K(Z(\Gamma))}}^1(I(\Gamma), K(\pi, n)) \\ K(Z(\Gamma)) \downarrow & & \downarrow K(Z(\Gamma)) \\ Z^n(K(\pi, n); \pi) & \xrightarrow{\delta_x} & H^{n+1}(I(\Gamma); \pi) \end{array} \quad \Phi$$

De ce diagramme nous déduisons qu'il suffit de démontrer que $\delta_A(i) = \Phi(\xi)$ où $i : K(\pi, n)_n = \pi$ est l'identité sur $K(\pi, n)_n = \pi$ et $\delta\gamma : Z^n(K(\pi, n), \pi) \rightarrow H^{n+1}(Z(\Gamma); \pi)$ est le cobord donné par la suite exacte $(\Psi_1(X)) \quad 0 \rightarrow K(\pi, n) \xrightarrow{\Psi_2(\eta_1)} Y \xrightarrow{\Psi_2(\eta_2)} Z(\Gamma) \rightarrow 0$.

Pour une fibration principale $\pi : E \rightarrow B$ de groupe G , muni d'une fonction tordante $\tau : B_n \rightarrow G_{n-1}$, H. Cartan (5) a donné explicitement un homomorphisme $h : B \rightarrow W(G)$ dans la classe caractéristique de $\pi : E \rightarrow B$ par $h_n(b) = S^1(\tau(b) \rho' h_{n-1} d_0(b))$ où $\rho : W(G)_{n-1} \rightarrow W(G)_{n-1}$ est le relèvement canonique de la fibration canonique $W(G) \rightarrow W(G)$, et $\delta' : W(G)_{n-1} \rightarrow 1xW(G)_n$ est l'inverse de l'isomorphisme $d_0 : 1xW(G)_n \rightarrow W(G)_{n-1}$. Dans notre cas, où $G = K(\pi, n)$ ceci donne explicitement un cocycle $h \in \Phi(\xi)$ comme suit : $h(\gamma) = \tau(\gamma)$ où $\tau : \Gamma_{n+1} \rightarrow K(\pi, n)_n \approx \pi$ est une fonction tordante correspondante à la fibration $\Psi_2(\eta_2) : Y \rightarrow \Gamma$. Si dans la définition de $\delta_A : Z^n(K(\pi, n), \pi) \rightarrow H^{n+1}(Z(\Gamma); \pi)$, nous considérons $X \in C^n(X; \pi) = C^n(K(\pi, n) \oplus Z(\Gamma); \pi)$ défini par $X(\gamma) = i(\gamma)$, $\gamma \in K(\pi, n)$ où $i : K(\pi, n)_n = \pi \rightarrow \pi$ est l'identité et par $X(y) \triangleq 0$, $y \in Z(\Gamma)_n$, nous avons $i(X) = i$ et $\delta(X) = \Psi_1(\eta_2)^*(h)$; il s'ensuit que $\delta_\gamma(i) = \Phi(\xi)$.

Nous disons qu'un ensemble simplicial de Kan, X , est un A_m si m est un entier > 1 tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

- (1) X est $(m-1)$ connexe
- (2) $\pi_i(X) = 0$ pour $i > 2m-1$
- (3) $\pi_i(X)$ est fini pour tout i .

Théorème 3-3-1 : Si X est un A_m minimal, et si $\pi_1(X)$ est abélien, alors il existe une structure de groupe simplicial sur X .

Vu le lemme 3-2-1, (p. 69) il suffit de faire la démonstration lorsque les $\pi_i(X)$ sont q -primaires (q étant un entier premier). Pour cela nous allons démontrer le

Lemme 3-3-2 : Soient m un entier > 1 et q un nombre premier ; si Γ est un groupe simplicial minimal, $(m-1)$ -connexe, tel que, pour tout i , Γ_i soit un q -groupe fini.

Alors $\Phi : \text{Ext}_{M_K(Z(\Gamma))}^1(I(\Gamma), K(\pi, n)) \rightarrow H^{n+1}(I(\Gamma); \pi)$ est surjectif pour $n < 2m-1$.

Démonstration : Soit $d : Z(\Gamma) \otimes_Z^\sim I(\Gamma)^\# \rightarrow I(\Gamma)$ l'homomorphisme donné par $d(\gamma, x) = \gamma(d_0 \lambda)(x)$ où $\lambda : I(\Gamma)_n^\# \rightarrow I(\Gamma)_{n+1}$ est la bijection de la définition

2-4-4. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{M_K(Z(\Gamma))}(\Omega, K(\pi, n)) & \rightarrow & \text{Ext}_{M_K(Z(\Gamma))}^1(I(\Gamma), K(\pi, n)) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \Phi \\ H^n(\Omega; \pi) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(I(\Gamma); \pi) \end{array}$$

où les lignes sont déduites de la suite exacte

$$(1) \quad 0 \rightarrow \Omega \rightarrow Z(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} I(\Gamma) \xrightarrow{d} I(\Gamma) \rightarrow 0$$

Etant donné que $Z(\Gamma)$ opère trivialement sur $K(\pi, n)$ (Proposition 2-2-5) et que δ est surjectif, il suffit de démontrer que si $p: \Omega \rightarrow \Omega/I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} \Omega$ est la projection, $p^*: H^n(\Omega/I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} \Omega; \pi) \rightarrow H^n(\Omega; \pi)$ est surjectif pour $n < 2m-1$. Nous allons démontrer $H_n(I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} \Omega) = 0$, $n < 2m-1$, ce qui entraînera que p^* est surjectif pour $n < 2m-1$.

Soient Ω' le noyau de l'application canonique $d' = d_0 \lambda: I(\Gamma)^\# \rightarrow I(\Gamma)$, et N le noyau de l'application canonique $h: Z(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} I(\Gamma) \rightarrow I(\Gamma)$. Nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Z(\Gamma) & \xrightarrow{\downarrow} & \otimes_Z^{\sim} \Omega & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & Z(\Gamma) & \xrightarrow{\downarrow} & \otimes_Z^{\sim} \Omega & \xrightarrow{\downarrow d} & Z(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} I(\Gamma)^\# \xrightarrow{i \otimes d_0 \lambda} Z(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} I(\Gamma) \xrightarrow{\downarrow h} 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow d & \nearrow \text{id} & \\ 0 & \rightarrow & Q & \rightarrow & I(\Gamma) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

où toutes les colonnes et les deux dernières lignes sont exactes et dans $M_K(Z(\Gamma))$, ce qui démontre que la première ligne est exacte et sans $M_K(Z(\Gamma))$. Il est alors facile de voir que nous avons une suite exacte

$$(3) \quad 0 \rightarrow I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} \Omega' \rightarrow I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} \Omega \rightarrow I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} N \rightarrow 0$$

et $H_n(I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} \Omega') = 0$ pour $n < 2m-1$. En effet, d'Eilenberg-Zilber (12) nous avons que l'homologie du produit simplicial est isomorphe à l'homologie du produit des groupes abéliens différentiels associés, appliquant la formule de Kunnet nous trouvons qu'effectivement $H_n(I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} \Omega') = 0$ pour $n < 2m$. Vu (3), il suffit donc de montrer que $H_n(I$

Par ailleurs, nous avons la suite exacte

$$(4) \quad 0 \rightarrow I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} N \rightarrow I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} I(\Gamma) \rightarrow I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} I(\Gamma) \rightarrow 0. \text{ Et on a } H_n(I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} I(\Gamma)) = 0 \text{ pour } n < 2m.$$

Démontrons que $H_1(I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} N)$ est q -primaire pour tout l . Vu la suite exacte (4), il suffit de démontrer que les $H_1(I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} I(\Gamma))$ et les $H_1(I(\Gamma) \otimes_Z^{\sim} I(\Gamma))$

$I(\Gamma)$ sont q -primaires. Pour les $H_1(I(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} I(\Gamma))$ cela résulte du fait que l'homologie de $Z(\Gamma)$ est q -primaire en dimensions > 0 , parce que les groupes d'homotopie de Γ sont q -primaires (théorème de Serre (3é)). Reste à prouver que $H_1(I(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} I(\Gamma))$ est q -primaire pour tout l . Pour cela, considérons la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}(\Gamma)}(\tilde{Z}, I(\Gamma)) \rightarrow (\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}(\Gamma)} I(\Gamma) \rightarrow \\ Z(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}(\Gamma)} I(\Gamma) \rightarrow \tilde{Z} \otimes_{\mathbb{Z}(\Gamma)} I(\Gamma) \rightarrow 0 \\ I(\Gamma)^{\text{SS}} \quad I(\Gamma)^{\text{SS}} / I(\Gamma)^2 \end{aligned}$$

Pour montrer que l'homologie du second terme est q -primaire, il suffit de montrer que l'homologie des trois autres l'est. Pour $H_1(I(\Gamma))$, on l'a déjà dit. De plus

$$I(\Gamma) / I(\Gamma)^2 \approx \Gamma / [\Gamma, \Gamma]$$

est un groupe abélien q -primaire, donc son homologie est q -primaire. Enfin

$$\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}(\Gamma)}(\tilde{Z}, I(\Gamma)) \approx H_2(\Gamma; \mathbb{Z})$$

est q -primaire, donc son homologie est q -primaire.

C.Q.F.D.

Puisque $H_1(I(\Gamma), N)$ est q -primaire, il suffit de montrer que $H_1(I(\Gamma), N; \mathbb{Z}_q) = 0$ pour $l < 2m - 1$, pour conclure que $H_1(I(\Gamma), N; \mathbb{Z}) = 0$ pour $l < 2m - 1$, ce qui établira le lemme.

Soit $N' = N \otimes \mathbb{Z}_q$. Nous avons $I(\Gamma), N \otimes \mathbb{Z}_q \approx I_q(\Gamma)$, N' où $I_q(\Gamma)$ est le noyau de l'augmentation $\mathbb{Z}_q$ étant pris comme l'anneau de base ($0 \rightarrow I_q(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}_q(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}_q \rightarrow 0$). Considérons la suite exacte $0 \rightarrow I_q(\Gamma), N' \rightarrow I_q(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_q}^{\sim} I_q(\Gamma) \rightarrow I_q(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_q(\Gamma)} I_q(\Gamma) \rightarrow 0$.

On a $H_n(I_q(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_q}^{\sim} I_q(\Gamma)) = 0$ pour $n < 2m$, et il suffit donc de démontrer

$$(5) \quad H_n(I_q(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_q}^{\sim} I_q(\Gamma)) = 0 \text{ pour } n < 2m.$$

Considérons la fibration de $I_q(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_q(\Gamma)} I_q(\Gamma)$ donnée par $E^p(I_q(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_q(\Gamma)} I_q(\Gamma)) =$ l'image de $I_q(\Gamma)^{\otimes_{\mathbb{Z}_q(\Gamma)} p}$ dans $I_q(\Gamma)$ par $j \otimes_{\mathbb{Z}_q(\Gamma)} i$, j l'injection, i l'identité. (respectivement la filtration donnée de $I_q(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_q}^{\sim} I_q(\Gamma)$ par $F^p(I_q(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_q}^{\sim} I_q(\Gamma)) =$ l'image de $I_q(\Gamma)^{\otimes_{\mathbb{Z}_q} p}$ dans $I_q(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_q}^{\sim} I_q(\Gamma)$ par $j \otimes_{\mathbb{Z}_q}^{\sim} i$, j l'injection, i l'identité). Ces filtrations sont "fortement" convergentes. En effet, il suffit de démontrer que, pour n et p fixes l'image de $H_n(F^{p+v}(I_q(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_q(\Gamma)} I_q(\Gamma)))$ dans $H_n(E^p(I_q(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_q(\Gamma)} I_q(\Gamma)))$ (respectivement de $H_n(F^{p+v}(I_q(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_q}^{\sim} I_q(\Gamma)))$ dans $H_n(E^p(I_q(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_q}^{\sim} I_q(\Gamma)))$) est nulle pour v assez grand. (voir 7, chapitre XV, section 2). On va montrer pour v assez grand que $(I_q(\Gamma)^{\otimes_{\mathbb{Z}_q(\Gamma)} p})_n \subset \text{Im}(q^k I_q(\Gamma)_n \otimes_{\mathbb{Z}_q(\Gamma)_n} I_q(\Gamma)_n \rightarrow$

$$I_q(\Gamma)_n \otimes_{Z_q(\Gamma)_n} I_q(\Gamma)_n \text{ (respectivement, } F^{p+v}(I_q(\Gamma) \otimes_{Z_q} I_q(\Gamma))_n \subset \text{Im } q^k \\ I_q(\Gamma)_n \otimes_{Z_q} I_q(\Gamma)_n \rightarrow I_q(\Gamma)_n)$$

Pour $k > 1$. Ce qui entrainera que la fibration est "fortement" convergente. Pour démontrer (I) il suffit de remarquer que **si Γ est un q -groupe fini, alors il existe un entier n tel que $I_q(\Gamma)^n \equiv 0 \pmod{q}$** (33).

Pour conclure la démonstration du lemme 3-3-2, il suffit de démontrer $E_{p,q}^1(I_q(\Gamma) \otimes_{Z(\Gamma)} I_q(\Gamma)) = 0$ pour $p + q < 2m$. Considérons l'application canonique $I_q(\Gamma) \otimes_{Z_q}^{\sim} I_q(\Gamma) \rightarrow \otimes_{Z_q(\Gamma)} I_q(\Gamma)$, elle détermine un isomorphisme $\varphi : E_{p,q}^1(I_q(\Gamma) \otimes_{Z_q}^{\sim} I_q(\Gamma)) \rightarrow E_{p,q}^1(I_q(\Gamma) \otimes_{Z_q(\Gamma)} I_q(\Gamma))$ pour $p + q < 2m$.

En effet :

$$F^p(I_q(\Gamma) \otimes_{Z_q(\Gamma)} I_q(\Gamma)) / F^{p+1}(I_q(\Gamma) \otimes_{Z_q(\Gamma)} I_q(\Gamma)) \approx$$

$$I_q(\Gamma)^p / I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{Z_q}^{\sim} I_q(\Gamma) \approx I_q(\Gamma)^p / I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{Z_q}^{\sim} I_q(\Gamma) / I_q(\Gamma)^2$$

Considérons le diagramme commutatif (dont les lignes sont exactes) :

$$\begin{array}{ccccccc} I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{Z_q(\Gamma)} I_q(\Gamma) & \xrightarrow{f_{p+1}} & I_q(\Gamma) \otimes_{Z_q(\Gamma)} I_q(\Gamma) & \rightarrow & I_q(\Gamma) / I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{Z_q(\Gamma)} I_q(\Gamma) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ I_q(\Gamma)^p \otimes_{Z_q(\Gamma)} I_q(\Gamma) & \xrightarrow{f_p} & I_q(\Gamma) \otimes_{Z_q(\Gamma)} I_q(\Gamma) & \rightarrow & I_q(\Gamma) / I_q(\Gamma)^p \otimes_{Z_q(\Gamma)} I_q(\Gamma) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Il définit un isomorphisme de $\text{Im } f_p / \text{Im } f_{p+1}$ sur le noyau de

$$I_q(\Gamma) / I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{Z_q(\Gamma)} I_q(\Gamma) \rightarrow I_q(\Gamma) / I_q(\Gamma)^p \otimes_{Z_q(\Gamma)} I_q(\Gamma),$$

donc sur l'image de

$$I_q(\Gamma)^p / I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{Z_q(\Gamma)} I_q(\Gamma) \xrightarrow{\varphi_p} I_q(\Gamma) / I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{Z_p(\Gamma)} I_q(\Gamma)$$

Or φ_p a un noyau nul. En effet, dans le diagramme commutatif

$$I_q(\Gamma)^p / I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{Z_q(\Gamma)} I_q(\Gamma) \xrightarrow{\varphi_p} I_q(\Gamma) / I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{Z_p(\Gamma)} I_q(\Gamma)$$

$$I_q(\Gamma)^p / I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{Z_q} I_q(\Gamma) / I_q(\Gamma)^2 \rightarrow I_q(\Gamma) / I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{Z_q} I_q(\Gamma) / I_q(\Gamma)^2$$

l'application Ψ_p est une injection ; donc φ_p est bien une injection, et l'image de φ_p est un isomorphe à

$$I_q(\Gamma)^p / I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{Z_q} I_q(\Gamma) / I_q(\Gamma)^2$$

Alors il suffit de remarquer que l'homomorphisme naturel

$$I_q(\Gamma)^p / I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{Z_q}^{\sim} I_q(\Gamma) \rightarrow I_q(\Gamma)^p / I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{Z_q}^{\sim} I_q(\Gamma) / I_q(\Gamma)^2$$

détermine un isomorphisme

$$H_n(I_q(\Gamma)^p/I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{\mathbb{Z}_q} I_q(\Gamma)) \approx H_n(I_q(\Gamma)^p/I_q(\Gamma)^{p+1} \otimes_{\mathbb{Z}_q} I_q(\Gamma)/I_q(\Gamma)^2),$$

pour $n < 2m$.

C.Q.F.D.

Corollaire : Soient m un entier > 1 , s un entier $< em-1$. Si Γ est un ensemble simplicial, minimal, $(m-1)$ -connexe, tel que $\pi_i(\Gamma)$ soit fini et q -primaire pour $i < s$ et $\pi_i(\Gamma) = 0$ pour $i > s$, alors il existe une structure de groupe simplicial sur Γ , telles que Γ_i soit un q -groupe fini pour tout i .

Démonstration : Nous disons qu'un ensemble simplicial est du type n s'il n'y a que n groupes d'homotopie non-nuls. Si Γ est du type 1, il est classique qu'il existe une structure de groupe sur Γ (23). Supposons que le corollaire soit vrai pour un ensemble simplicial du type $n-1$. Considérons la fibration principale $K(\pi_k(\Gamma), k) \rightarrow \Gamma^{(k)} \rightarrow \Gamma^{(k-1)}$. Par l'hypothèse de récurrence $\Gamma^{(k-1)}$ admet une structure de groupe simplicial minimal et $\Gamma^{(k-1)}$ est un q -groupe fini pour tout i . Le lemme 3-3-2 implique qu'il existe une fibration principale, avec la même classe caractéristique, $f: Y \rightarrow \Gamma^{(k-1)}$, telle que Y soit un groupe et f un homomorphisme. Il existe une application simpliciale bijective $\varphi: \Gamma \rightarrow Y$ (5) qui nous permet de définir une structure de groupe dans Γ par

$$\varphi \sigma (\varphi^{-1} \times \varphi^{-1}) \text{ où } \sigma: Y \times Y \rightarrow Y \text{ dénote la multiplication dans } Y.$$

Le théorème 3-3-1 est, alors, une conséquence du corollaire au lemme 3-3-1.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - J.C. Adams, "On Products in Minimal Complexes", *Trans. Am. Math. Soc.* t. 82, 1956.
- 2 - H. Cartan, "Opérations Cohomologiques", I, II, et III; Sémin. H. Cartan, 54/55.
- 3 - H. Cartan, "Puissances divisées", Sémin. H. Cartan, 54/55.
- 4 - H. Cartan, "Sur la Théorie de Kan", Sémin. H. Cartan, 56/57.
- 5 - H. Cartan, "Théorie des Fibrés Principaux", *ibid.*
- 6 - H. Cartan, "Opérations Cohomologiques Secondaires", Sémin. H. Cartan, 58/59.
- 7 - Cartan-Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Math. Series, N° 19, Princeton University Press, 1956.
- 8 - A.H. Copeland, Jr. "On H-spaces with Two Non-Trivial Homotopy Groups", *Proceedings of the American Math. Soc.*, vol 8, 1957.
- 9 - A. Dold, "Homology of Symmetric Products and other Functors of Complexes", *Annals of Math.*, Series 2, t. 68 (1958), pp. 54-80.
- 10 - S. Eilenberg and S. MacLane, "A General Theory of Natural Equivalences," *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 58 (1945)
- 11 - S. Eilenberg and S. MacLane "On the Groups $H(\pi, n)$ ", "Annals of Maths.", vol. 58 (1953), pp. 55-106; II, *ibid.* vol. 60; 1954, pp. 49-139; III, *ibid.* pp. 513-557.
- 12 - Eilenberg-Zilber, "Semi-simplicial Complexes and Singular Homology, *Annals of Math.*, t. 51 (1950)
- 13 - A. Grothendieck, *Tohoku Math. J.*, 2^e serie, 9, 1957.
- 14 - A. Heller, "Homotopy Resolutions of Semi-simplicial Complexes", *Trans. of the Amer. Soc.*, vol. 80 (1955).
- 15 - A. Keller, "Homological Algebra", *Annals of Math.*, vol. 68 (1958).
- 16 - D.M. Kan, "Abstract Homotopy", II et III, *Proc. Nat. Acad. of Sci.*, U.S.A., 41 (1955), pp. 1092-1096.
- 17 - D.M. Kan, "Adjoint Functors", *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 87 (1958).
- 18 - D.M. Kan, "Functors Involving C.S.S. Complexes", *Trans. Am. Math. Soc.*, t. 87 (1958).
- 19 - J.A. Leslie, *Comptes rendus*, 248 (1959) p. 2692.
- 20 - J.A. Leslie, *Comptes rendus*, 250 (1960) p. 22.
- 21 - J.A. Leslie, *Comptes rendus*, 251, (1960). p. 190.
- 22 - J.A. Leslie, *Comptes rendus*, (1960), pp. 2854-2856.
- 23 - S. MacLane, "Homology Products in $K(\pi, n)$ ", "Proc. Am. Math. Soc. t. 5, 1954.

- 24 - J.P. Meyer, "Whitehead Products and Postnikov Systems" Am. Journal of Math. vol. lxxxii (1960).
- 25 - J.W. Milnor, "The Geometric Realization of a Semi-simplicial Complex", Annals of Math., series 2, t. 65 (1957).
- 26 - J.W. Milnor, "On Spaces Having the Homotopy-type of a C.W. Complex", Trans. of the Am. Soc. vol. 90 (1959).
- 27 - J.W. Milnor, "The Geometric Realisation of a Semi-simplicial Complex", Seminar J.C. Moore on Algebraic Homotopy Theory.
- 28 - J.C. Moore, "Homotopie des complexes monoidaux I et II" Sem. H. Cartan 54/55.
- 29 - J.C. Moore, "Sur la suspension", Sem. H. Cartan 59/60.
- 30 - J.C. Moore, Seminar on Algebraic Homotopy Theory.
- 31 - J.C. Moore, "Semi-simplicial Complexes and Postnikov Systems", Proc. of the International Symposium on Algebraic Topology, Mexico, 1956.
- 32 - J.P. Serre, "Groupes d'Homotopie et classes de groupes abéliens", Annals of Math. 58 (1953).
- 33 - J.P. Serre, "Homologie des groupes, Applications arithmétiques", Cours du Collège de France 58/59.
- 34 - M. Sugawara, "A Condition that a Space is Group-like" Math. Journal of Okayama Univ. (1957).
- 35 - M. Sugawara, "On a Condition that a Space is an H-Space", Math. J. Okayama Univ. (6), 1956.
- 36 - Suzuki, Harno, "On the Eilenberg-MacLane Invariants of Loop Space", Journal of Math. Soc. of Japan, t. 8, 1956.
- 37 - J.H.C. Whitehead and I.M. James, "Homotopy Theory of Sphere Bundles over Spheres", London Math. Soc. Series 3, t. 4 (1954).
- 38 - M. Yoneda, "Foncteurs Ext et satellites des foncteurs", Sem. des Jeunes Chercheurs Mathématiques, 59/60. Institut Henri Poincaré.
- 39 - M. Zisman, "Quelques Propriétés des Fibrés au sens de Kan", Thèse à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

DEUXIEME THESE

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

"Fonctions automorphes d'une variable"

Vu et approuvé

Paris, le 23 Juillet 1963

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

SAMACETA

92 rue de Richelieu

PARIS 2^{ème}

